ЗАДАЧА 1.

1. Определить положение центра тяжести сечения.
2. Найти осевые (экваториальные) и центробежные моменты инерции относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести (x_cи y_c).
3. Определить направление главных центральных осей (Uи V).
4. Найти величины моментов инерции сечения относительно главных центральных осей.

I-швеллер №36, II-уголок 90 х 90 х 8.

Геометрические характеристики элементов сечения:

Швеллер № 36: h=36 см, b=11 см, d=0,75см, t=1,26 см, A=53,4 см^2, z_0=2,68см,

J_x=10820см^4, J_y=513 см^4.

Уголок № 90 х 90 х 8мм: B=9см,d=0,9 см, A=13,93 см^2, z_0=2,51 см,

J_y= J_x=106,11см^4, J_{x0}=168,4см^4 J_{y0}=43,8см^4.

Находим центр тяжести сечения:

$x_1=b-z_0$=11-2,68=8,32 см, $x_2=b-z_0$=11-2,51=8,49см.

$$x_c=\frac{\Sigma S_i}{\Sigma A_i}=\frac{A_1\cdot x_1+A_2\cdot x_2}{A_1+A_2}=\frac{53{,}4\cdot 8{,}32+13{,}9\cdot 8{,}49}{53{,}4+13{,}93}=8{,}351\,см$$

$y_1=h/2$=36/2=18см, $y_2=h+2{,}51$=38,51см.

$$y_c=\frac{\Sigma S_i}{\Sigma A_i}=\frac{A_1\cdot y_1+A_2\cdot y_2}{A_1+A_2}=\frac{53{,}4\cdot 18+13{,}93\cdot 38{,}51}{53{,}4+13{,}93}=22{,}243\,см$$

X_C, Y_C – главные центральные оси сечения.

Главные центральные моменты инерции всего сечения:

a_i – расстояния между осью Xc и центрами тяжести каждой из фигур:

$a_1 = y_1 - y_c$=18-22,243=-4,243см

$a_2 = y_2 - y_c$=38,51-22,243=16,267 см

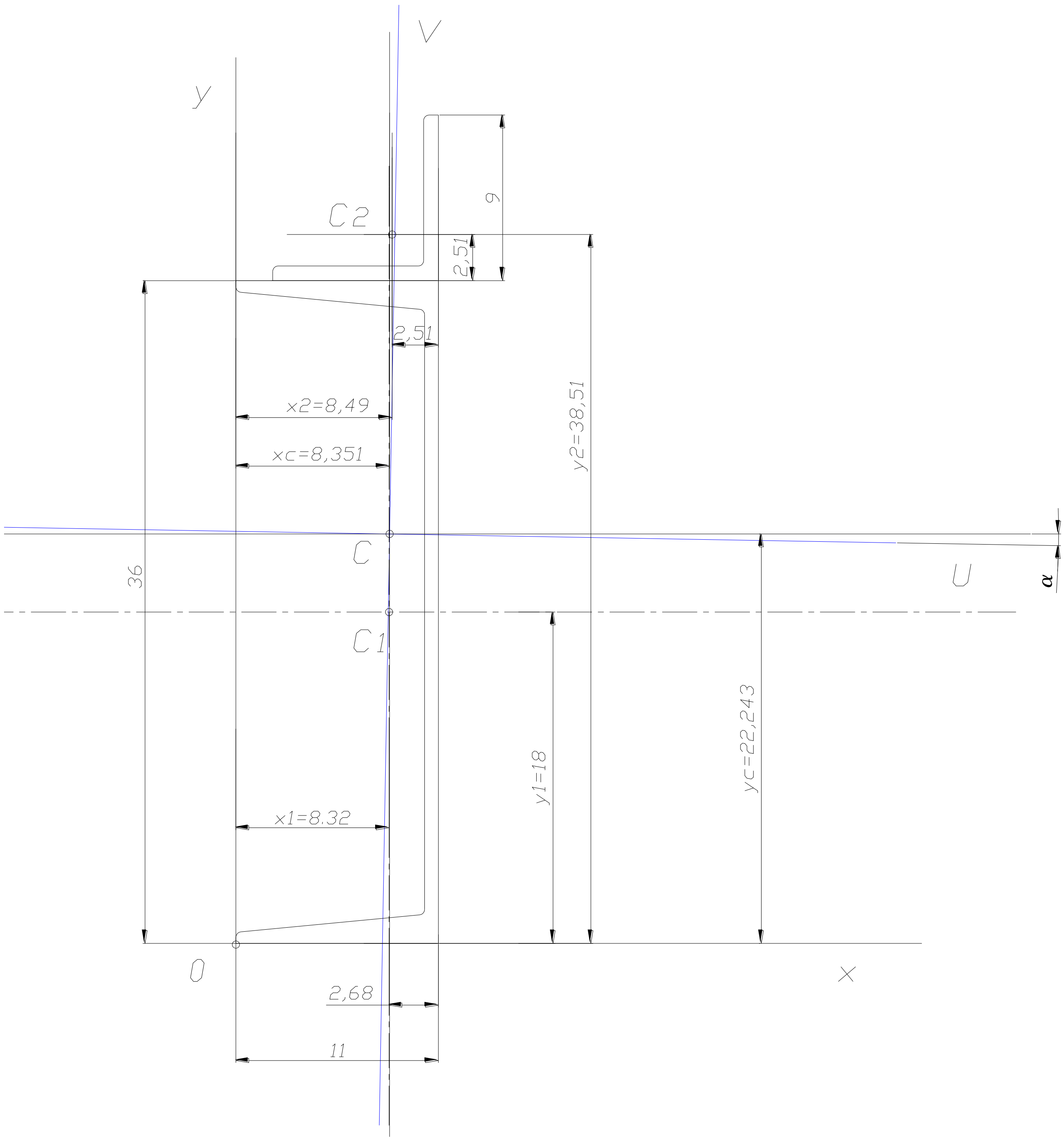
b_i – расстояния между осью Y_C и центрами тяжести каждой из фигур:

$b_1 = x_1 - x_c$=8,32-8,351=-0,031 см

$b_2 = x_2 - x_c$=8,49-8,351=0,139 см

$J_x = \Sigma J_{xi} = J_x^{I} + J_x^{II} = J_{x1} + A_1 \cdot a_1^2 + J_{x2} + A_2 \cdot a_2^2 = 10820 + 53{,}4 \cdot (-4{,}243)^2 + 106{,}11 +$
$+ 13{,}93 \cdot 16{,}267^2 = 15573{,}564$см^4

$J_y = \Sigma J_{yi} = J_y^{I} + J_y^{II} = J_{y1} + A_1 \cdot b_1^2 + J_{y2} + A_2 \cdot b_2^2 = 513 + 53{,}4 \cdot (-0{,}031)^2 + 106{,}11 + 13{,}93 \cdot 0{,}139^2 = 619{,}43$см^4

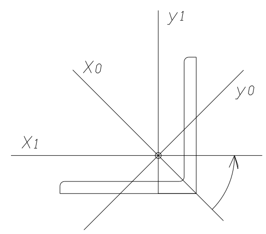


Центробежный момент инерции:

$J_{x_1y_1} = J_{x_0y_0} + A \cdot a \cdot b$

Швеллер имеет горизонтальную ось симметрии, собственные центральные оси швеллера являются главными осями, поэтому первое слагаемое в формуле для швеллера равно 0.

Для уголка:



$$J_{x_1y_1} = \frac{\left(J_{x_0} - J_{y_0}\right)^2 sin2\alpha}{2} + J_{x_0y_0} cos2\alpha$$

так как оси x_0,y_0 являются главными центральными осями, то момент инерции $J_{x_0y_0}$ равен нулю.

Угол $\alpha = 45^{\circ}$, так как оси x_1,y_1, относительно которых вычисляется центробежный момент инерции, повернуты против часовой стрелки относительно осей x_0,y_0.

Следовательно:

$$J_{x_1y_1} = \frac{168{,}4 - 43{,}8}{2} = 62{,}3 \text{ см}^4$$

Для всего сечения:

$$J_{xy} = A_1 \cdot a_1 \cdot b_1 + J_{x_2y_2} + A_2 \cdot a_2 \cdot b_2 = 53{,}4 \cdot (-4{,}243) \cdot (-0{,}031) + 62{,}3 +$$

$$+16{,}267 \cdot 0{,}139 \cdot 13{,}93 = 100{,}821 \text{ см}^4$$

Направление главных центральных осей:

$$tg2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2 \cdot 100{,}821}{619{,}43 - 15573{,}564} = -0{,}01348$$

$$2\alpha_0 = -48' \qquad \alpha_0 = -24'$$

Откладываем угол α_0по часовой стрелке и проводим главные центральные оси Uи V:

Вычисляем моменты инерции относительно главных центральных осей:

$$J_{\frac{max}{min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\left(J_x - J_y\right)^2 + 4J_{xy}^2$$

$$J_{\frac{max}{min}} = \frac{15573{,}564 + 619{,}43}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(15573{,}564 - 619{,}43)^2 + 4 \cdot 100{,}821^2} =$$

$$= 8096{,}497 \pm 7477{,}747$$

$$J_{max} = 15574{,}244 \text{ см}^4 J_{min} = 618{,}75 \text{ см}^4$$

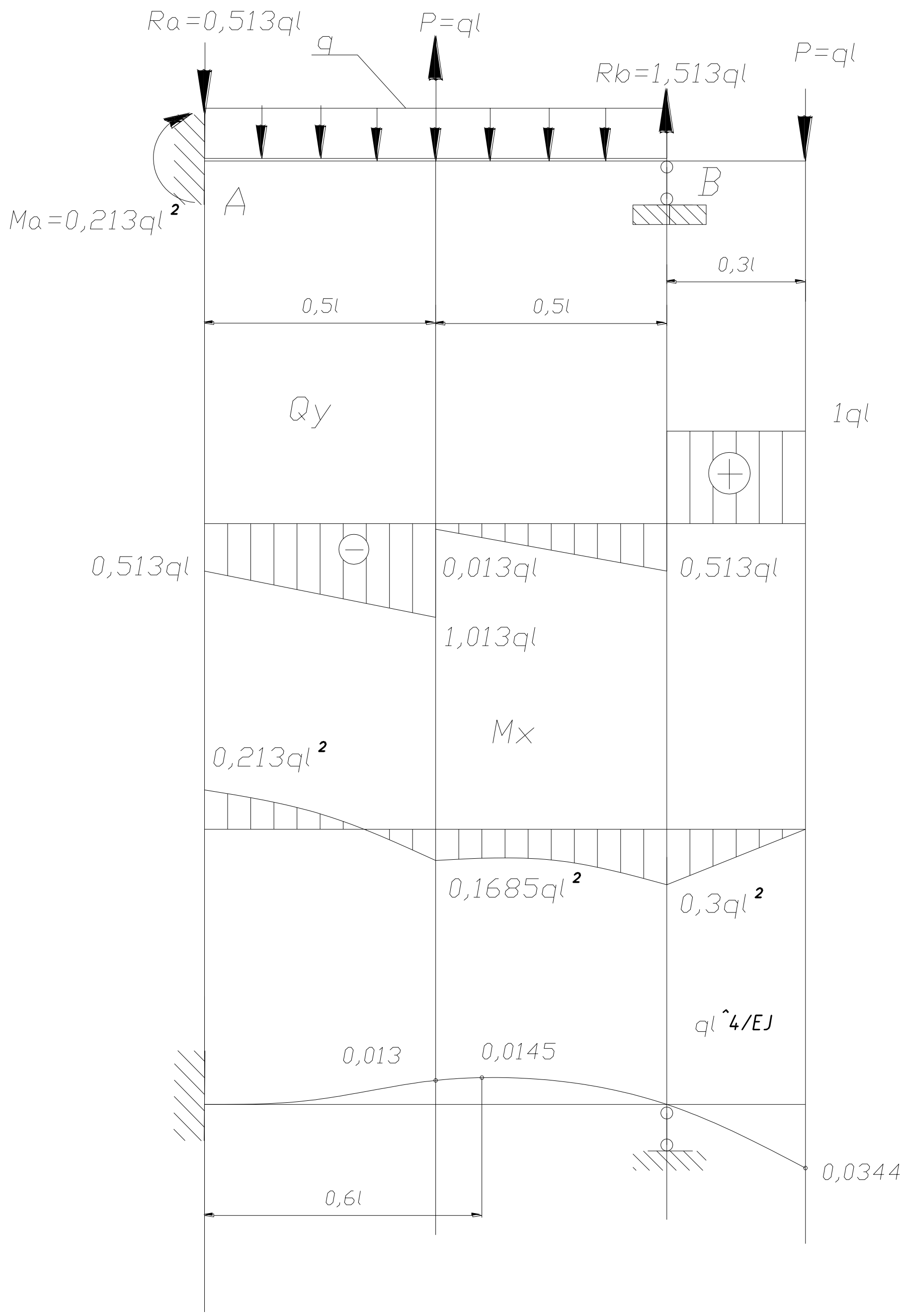
так как $J_x > J_y$, то J_{max} относительно главной оси U,J_{min}относительно главной оси V.

Проверка:

$J_{uv} = J_{xy}\cos 2\alpha - 0{,}5(J_y - J_x)\cdot\sin 2\alpha = 100{,}821 \cdot 0{,}999 - 0{,}5(619{,}43 - 15573{,}564) \cdot 0{,}01348 = 0$

ЗАДАЧА 2.

Построить эпюры Qи M в долях ql^2, эпюру прогибов.



Для раскрытия статической неопределимости используем метод начальных параметров. Поскольку на правой опоре перемещение $y_0 = 0$, в соответствии с условиями закрепления балки $y(z = l) = 0$, $\theta(z = l) = 0$, функции прогиба и угла поворота запишутся следующим образом: на опоре В действует поперечная сила $Q=-ql$ и момент $M=-0{,}3ql^2$ от действия силы на консоли.

$$EJ_x y_{z=l} = \Theta_0 \cdot l + R_B \frac{l^3}{6} - q\frac{l^4}{24} + ql\frac{(l-0{,}5l)^3}{6} - 0{,}3ql\frac{l^2}{2} - ql\frac{l^3}{6} = 0$$

$$EJ_x \Theta_{z=l} = \Theta_0 + R_B \frac{l^2}{2} - q\frac{l^3}{6} + ql\frac{(l-0{,}5l)^2}{2} - 0{,}3ql^2 - ql\frac{l^2}{2} = 0$$

тогда:

$$\Theta_0 = -R_B\frac{l^2}{2} + 0{,}842ql^3 = 0 \;\; R_B = 1{,}513ql$$

Из уравнений равновесия находим реакции R_A и M_A:

$$\Sigma Y_i = R_A + R_B - q \cdot l - P + P = 0; R_A = -R_B + q \cdot l = -1{,}513ql + ql = -0{,}513ql$$

$$M_A = -P \cdot 1{,}3l + R_B \cdot l - \frac{ql^2}{2} + P \cdot 0{,}5l = -ql \cdot 1{,}3l + 1{,}513ql \cdot l - \frac{ql^2}{2} + ql \cdot 0{,}5l = 0{,}213ql^2$$

Строим эпюры Q и M.

Определяем прогибы на консоли и в пролете:

помещаем начало координат в жесткой заделке, тогда $y_0 = 0$, $\Theta_0 = 0$

$$EJ_x y_{z=1,3l} = M_A \cdot \frac{(1{,}3l)^2}{2} - R_A \cdot \frac{(1{,}3l)^3}{6} - q \cdot \frac{(1{,}3l)^4}{24} + q \cdot \frac{(1{,}3l-l)^4}{24} + ql \cdot \frac{(0{,}8l)^3}{6} + R_B \cdot \frac{(0{,}3l)^3}{6} =$$

$$= 0{,}213 \cdot ql^2\frac{(1{,}3l)^2}{2} - 0{,}513 \cdot ql\frac{(1{,}3l)^3}{6} - q\frac{(1{,}3l)^4}{24} + q\frac{(1{,}3l-l)^4}{24} + ql\frac{(0{,}8l)^3}{6} + 1{,}513ql\frac{(0{,}3l)^3}{6} = -0{,}0344ql^4$$

$$y_{z=1,3l} = -\frac{0{,}0344\,ql^4}{EJ_x}$$ перемещение вниз.

прогиб на расстоянии *0,5 l:*

$$EJ_x y_{z=0,5l} = M_A \cdot \frac{(0{,}5l)^2}{2} - R_A \cdot \frac{(0{,}5l)^3}{6} - q \cdot \frac{(0{,}5l)^4}{24} = 0{,}213 \cdot ql^2\frac{(0{,}5l)^2}{2} - 0{,}513 \cdot ql\frac{(0{,}5l)^3}{6} -$$

$$-q\frac{(0{,}5l)^4}{24} = 0{,}013ql^4$$

$$y_{z=0,5l} = \frac{0{,}013ql^4}{EJ_x}$$ перемещение вверх.

прогиб на расстоянии *0,6l:*

$$EJ_x y_{z=0,6l} = M_A \cdot \frac{(0,6l)^2}{2} - R_A \cdot \frac{(0,6l)^3}{6} - q \cdot \frac{(0,6l)^4}{24} = 0,213 \cdot ql^2 \frac{(0,6l)^2}{2} - 0,513 \cdot ql \frac{(0,6l)^3}{6} -$$

$$- q \frac{(0,6l)^4}{24} = 0,0145ql^4$$

$$y_{z=0,5l} = \frac{0,0145\,ql^4}{EJ_x}$$ перемещение вверх

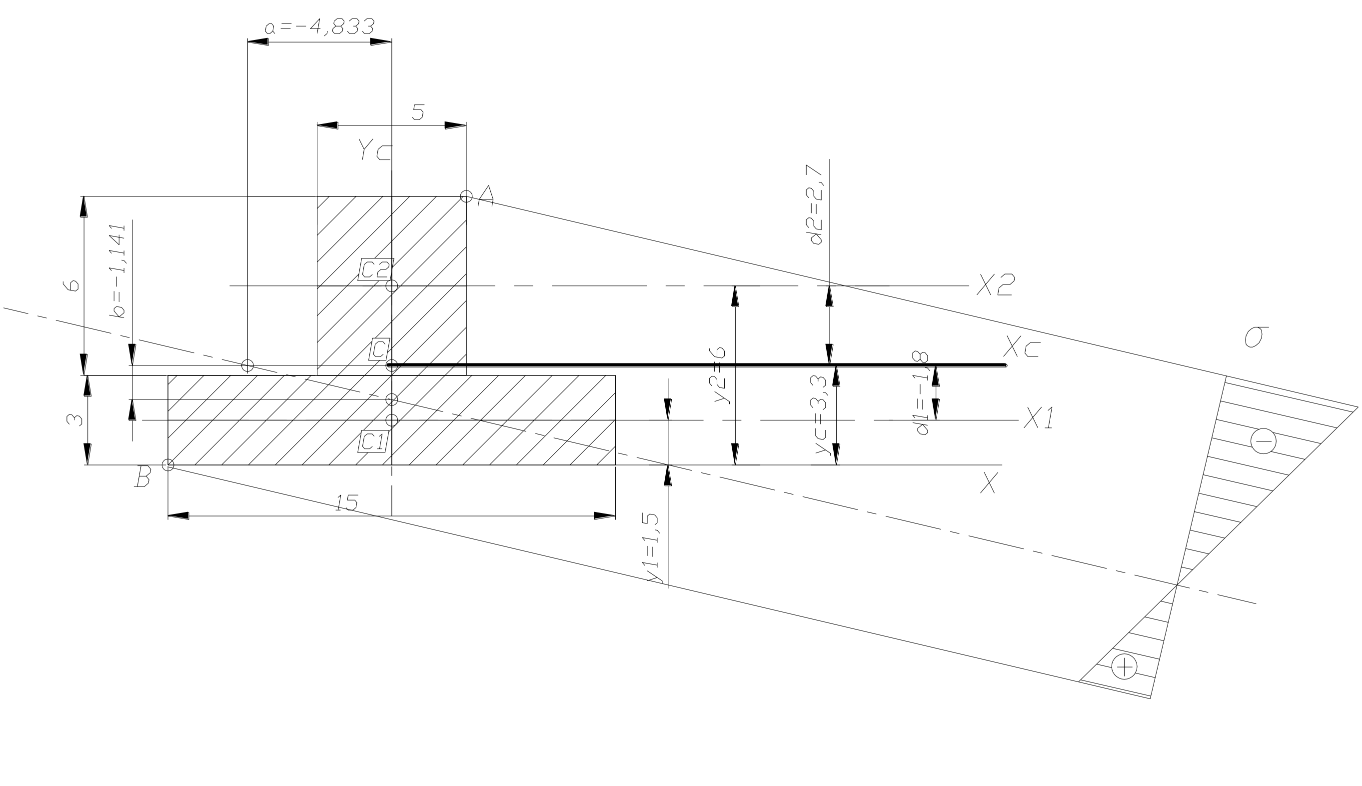
Строим эпюру прогибов.

ЗАДАЧА 3.

Чугунный короткий стержень сжимается силой P, приложенной в точке A.

1. Вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжение в поперечном сечении, выразив эти сечения через P и размеры сечения.
2. Найти допускаемую нагрузку P при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие и растяжение.

$[\sigma_{сж}] = 100\,МПа$ $[\sigma_{р.}] = 23МПа$ $a = 5см$ $b = 3см$



Сечение состоит из 2 фигур:

I- прямоугольник со сторонами *15 x 3 (см)*

II- прямоугольник 6 *x 5(см)*

Сечение симметрично относительно Y, следовательно, необходимо найти только координату Y_c

y_i– расстояния от оси X до центров тяжестей C_i каждой из фигур:

$$y_1=1,5\text{ см}\quad y_2=6\text{ см}$$

Площади фигур:

$$F_1= 15 \cdot 3 = 45 см^2 \quad F_2= 6 \cdot 5 = 30\ см^2$$

Координаты центра тяжести всей фигуры:

$$Y_C=\frac{F_1y_1+F_2y_2}{F_1+F_2}=\frac{45\cdot 1,5+30\cdot 6}{45+30}=\frac{247,5}{75}=3,3 см$$

Проводим через найденный центр тяжести центральную ось $X_{C.}$

Моменты инерции каждой из фигур относительно собственных осей:
прямоугольник

$$J_x=\frac{bh^3}{12}\quad J_y=\frac{hb^3}{12}$$

a_i – расстояния между осью X_c и центрами тяжести каждой из фигур:

$d_1 = y_1\text{-}y_c=1,5\text{-}3,3=\text{-}1,8$ *см*

$d_2= y_2\text{-}y_c=6\text{-}3,3=2,7$ *см*

Моменты инерции всей фигуры относительно главных центральных осей:

$$J_x=\Sigma J_{xi}= J_x^I+ J_x^{II} = J_{x1}+A_1\cdot d_1^2+J_{x2}+A_2\cdot d_2^2=$$

$$=\frac{15\cdot 3^3}{12}+45\cdot(-1,8)^2-\frac{5\cdot(6)^3}{12}-30\cdot(2,7)^2=488,25\text{ см}^2$$

$$J_y=\Sigma J_{yi}= J_y^I+J_y^{II}= J_{y1}+J_{y2}=$$

$$=\frac{3\cdot 15^3}{12}+\frac{6\cdot 5^3}{12}=906,25\text{ см}^2$$

Радиусы инерции сечения относительно осей X_C, Y_C.

$$i_x=\sqrt{\frac{J_x}{F}}=\sqrt{\frac{488,25}{75}}=2,55 см\quad i_y=\sqrt{\frac{J_y}{F}}=\sqrt{\frac{906,25}{75}}=3,476 см$$

Определяем положение нулевой (нейтральной линии).

Координаты точки приложения силы *P*.

$x_A=2,5$ *см*, $y_A=5,7$ *см*

Отрезки, отсекаемые нулевой линией на координатных осях:

$$a=-\frac{i_y^2}{x_A}=-\frac{3,476^2}{2,5}=-4,833 см \quad b=-\frac{i_x^2}{y_A}=-\frac{2,55^2}{5,7}=-1,141 см$$

Откладываем эти отрезки на осях X_CиY_Cи через эти оси проводим нейтральную линию n-n.

Наиболее удаленные точки от нейтральной линии т.1 и т.2 являются наиболее напряженными.

Координаты *т.А:* $x_A=2,5$ *см*, $y_A=5,7$ *см*

Координаты *т.В:* $x_B=-7,5$ *см*, $y_B=-3,3$ *см*

Напряжения в этих точках:

$$\sigma_A=-\frac{P}{F}\left(1+\frac{x_P}{i_y^2}x_A+\frac{y_P}{i_x^2}y_A\right)=-\frac{P}{75}\left(1+\frac{2,5}{3,476^2}2,5+\frac{5,7}{2,55^2}5,7\right)=-P\cdot 0,0869$$

$$\sigma_B=-\frac{P}{F}\left(1+\frac{x_P}{i_y^2}x_B+\frac{y_P}{i_x^2}y_B\right)=-\frac{P}{75}\left(1+\frac{2,5}{3,476^2}(-7,5)+\frac{5,7}{2,55^2}(-3,3)\right)=0,0459\cdot P$$

Из условия прочности находим допускаемую нагрузку *P:*

$$|P_A|=P\cdot 0,0869\cdot 10^4\le [\sigma_{сж}]=100 МПа$$

$$P=115,074 кН$$

$$|R_{B.}|=P\cdot 0,0459\cdot 10^4\le [\sigma_{р.}]=23 МПа$$

$$F=50,108 кН$$

принимаем $P_{min}=50,108$ *кН*

тогда $\sigma_A=-0,0869\cdot P\cdot 10^4=-0,0869\cdot 50,108\cdot 10^4\cdot 10^3=43,54 МПа\le [\sigma_{сж}]=100 МПа$

$$\sigma_B=0,0459\cdot P\cdot 10^4=0,0459\cdot 50,108\cdot 10^4\cdot 10^3=22,99 МПа\le [\sigma_{р.}]=23 МПа$$