ВАРИАНТ 1.

1. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы М, М, Т, Т, Е, И, К, А, А, А, получится слово “математика”?

В слове МАТЕМАТИКА десять букв, это в точности те буквы, которые написаны на кубиках. Используем перестановки с повторениями – состава $(2,2,1,1,1,3)$. Т.е. число “слов” (включая бессмысленные), которые можно образовать, переставляя кубики, равно числу перестановок с повторениями этого состава:

$$P(2,2,1,1,1,3) = \frac{10!}{2!\,2!\,1!\,1!\,1!\,3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot2\cdot6} =$$

$$= 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 = 151200$$

Это есть общее число элементарных исходов в результате опыта – выкладывания всех кубиков в ряд: $n = 10$. Число благоприятных исходов для появления события “получится слово МАТЕМАТИКА”: $m = 1$. Поделив это число на общее число элементарных исходов, получим искомую вероятность того, что в результате выкладывания кубиков получится слово МАТЕМАТИКА:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{1}{151200}$$

2. Найти вероятность двукратного извлечения белого шара из урны, в которой из 15 шаров имеется 10 белых, если: а) вынутый шар возвращается обратно в урну; б) вынутый шар в урну не возвращается.

Обозначим события: А = {первый вынутый шар - белый}, В = {второй вынутый шар - белый}, С = {оба вынутых шара - белые}.

а) Событие С равно произведению событий А, В: $C = AB$. Поскольку вынутый шар возвращается в урну, то события A и B – независимые, тогда по теореме умножения вероятностей для независимых событий, вероятность события C:

$$P(C) = P(A)P(B)$$

Всего в урне 10 белых шаров из 15, поэтому вероятность события A:

$$P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Такая же вероятность у события B, поскольку первый вынутый шар возвращается в урну и состав шаров не меняется. Тогда вероятность двукратного извлечения белого шара из урны:

$$P(C) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

б) Событие С равно произведению событий А, В: $C = AB$. Поскольку вынутый шар не возвращается в урну, то события A и B – зависимые, тогда по теореме умножения вероятностей в общем случае, вероятность события C:

$$P(C) = P(A)P(B|A)$$

Изначально в урне 10 белых шаров из 15, тогда вероятность события A:

$$P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Если событие A выполнилось, то в урне останется 14 шаров, из которых 9 шаров – белые, тогда условная вероятность события B при условии выполнения события A:

$$P(B|A) = \frac{9}{14}$$

Тогда вероятность двукратного извлечения белого шара из урны:

$$P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$$

3. В одной студенческой группе обучаются 24 студента, во второй – 36 студентов и в третьей – 40 студентов. По алгебре получили отличные оценки 6 студентов первой группы, 6 студентов второй группы и 4 студента третьей группы. Наугад выбранный студент оказался получившим по алгебре оценку “отлично”. Какова вероятность того, что он учится в первой группе?

Обозначим события:
A = {выбранный студент получил “отлично” по алгебре}
H_1 = {выбран студент из 1-й группы}
H_2 = {выбран студент из 2-й группы}
H_3 = {выбран студент из 3-й группы}
По условию задачи вероятности гипотез H_i (учитываем, что всего студентов 24+36+40 = 100):

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1) = \frac{24}{100} = 0{,}24; \quad \mathrm{P}(\mathrm{H}_2) = \frac{36}{100} = 0{,}36; \ ; \quad \mathrm{P}(\mathrm{H}_3) = \frac{40}{100} = 0{,}4$$

Условные вероятности события A (при условии выполнения H_i) по условию задачи (учитываем состав студентов в группах и число сдавших алгебру на отлично):

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_1) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}; \quad \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}; \quad \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_3) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

Вероятность того, что выбранный студент, сдавший алгебру на отлично, учится в первой группе – это условная вероятность $\mathrm{P}(\mathrm{H}_1|A)$, находим её по формуле Байеса:

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}_1|A) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{H}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{H}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_3)\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_3)} =$$

$$= \frac{0{,}24 \cdot \frac{1}{4}}{0{,}24 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}36 \cdot \frac{1}{6} + 0{,}4 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{0{,}06}{0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}04} = 0{,}375$$

4. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Что вероятнее: отказ четырех приборов при испытании 20 или отказ шести приборов при испытании 30, если приборы испытываются независимо друг от друга?

Вероятность того, что в N независимых испытаниях, в каждом из которых событие наступает с одной и той же вероятностью p, событие наступит ровно n раз, вычисляется по формуле Бернулли:

$$p_N(n) = C_N^n \cdot p^n \cdot q^{N-n} \quad (q = 1 - p)$$

У нас: $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$.

Вероятность отказа 4 приборов из 20 равна:

$$p_{20}(4) = C_{20}^{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{16} = \frac{20!}{4!\,16!} \cdot \frac{4^{16}}{5^{20}} = 4845 \cdot \frac{4^{16}}{5^{20}}$$

Вероятность отказа 6 приборов из 30 равна:

$$p_{30}(6) = C_{30}^{6} \cdot 0{,}2^6 \cdot 0{,}8^{24} = 593775 \cdot \frac{4^{24}}{5^{30}}$$

Сравним значения $4845 \cdot \frac{4^{16}}{5^{20}}$ и $593775 \cdot \frac{4^{24}}{5^{30}}$:

$$4845 \cdot \frac{4^{16}}{5^{20}} \;<>\; 593775 \cdot \frac{4^{24}}{5^{30}}$$

$$4845 \;<>\; 593775 \cdot \frac{4^{8}}{5^{10}}$$

$$4845 \;<>\; 23751 \cdot 0{,}8^{8}$$

$$4845 \; > \; 3984{,}76$$

Т.е. $p_{20}(4) > p_{30}(6)$: более вероятен отказ четырех приборов при испытании 20, чем отказ шести приборов при испытании 30

5. Известно, что 5% радиоламп, изготовляемых заводом, являются нестандартными. Из большой партии (независимо друг от друга) производится случайная выборка радиоламп. Сколько ламп надо взять, чтобы с вероятностью не менее 0,9 была извлечена хотя бы одна нестандартная лампа?

Вероятность того, что отдельно взятая лампа окажется нестандартной, равна $p = 0{,}05$ по условию задачи. Значит вероятность того, что случайная лампа окажется стандартной: $q = 1 - p = 0{,}95$. Вероятность того, что n случайных ламп все окажутся стандартными, равна (используем теорему умножения вероятностей для независимых событий): $q^n = 0{,}95^n$. Соответственно, вероятность того, что из n извлечённых ламп хотя бы одна окажется нестандартной, как вероятность противоположного события, равна $1 - q^n = 1 - 0{,}95^n$. Значит нам нужно найти наименьшее натуральное n, чтобы выполнялось неравенство: $1 - 0{,}95^n \geq 0{,}9$:

$$1 - 0{,}95^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}95^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow nlg0{,}95 \leq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}0223n \leq -1 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{0{,}0223} \approx 44{,}9$$

Таким образом, нужно взять 45 ламп, чтобы с вероятностью не менее 0,9 была извлечена хотя бы одна нестандартная лампа.

6. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Найдите вероятность того, что на первых 10 страницах меньше двух опечаток.

Пользуемся формулой Пуассона для простейшего потока событий. У нас $\lambda = 0{,}1$ (опечатка на одну страницу: 50/500) - интенсивность потока, $t = 10$ (стр.):

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$$

$$P_{10}(k) = \frac{1^k \cdot e^{-1}}{k!} = \frac{1}{k! \cdot e}$$

Вероятность того, что на первых 10 страницах меньше двух опечаток складывается из вероятностей $P_{10}(0)$ и $P_{10}(1)$:

$$P_{10}(0) + P_{10}(1) = \frac{1}{0! \cdot e} + \frac{1}{1! \cdot e} = \frac{2}{e} \approx 0{,}736$$

7. Три стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,7, для третьего – 0,5. Составить закон распределения случайной величины X - числа попаданий в мишень. Найти интегральную функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Найти математическое ожидание, дисперсию числа попаданий, вероятности событий $X < 2,\ 0 < X \leq 2$.

Обозначим события: $A_i = \{$ попадание $i -$того стрелка$\}$, вероятности этих событий по условию задачи: $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}5$. Противоположные события: $\bar{A}_i$ $\{ i -$тый стрелок не попадёт$\}$:

$$P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 0{,}2; \quad P(\bar{A}_2) = 1 - P(A_2) = 0{,}3;$$

$$P(\bar{A}_3) = 1 - P(A_3) = 0{,}5$$

Событие $\{X = 3\}$ – произведение событий A_1 , A_2 , A_3:$\{X = 3\} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

Так как события A_i независимые, то по теореме умножения вероятностей вероятность события В равна:

$$P(X = 3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}28$$

Событие $\{X = 2\}$ складывается из событий:

$$\{X = 2\} = \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$$

Так так события – слагаемые – несовместные события, то по теореме сложения вероятностей:

$$P(X = 2) = P(\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3)$$

$$P(\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = [\text{события } \bar{A}_1, A_2, A_3 \text{ независимые}] =$$

$$P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}07$$

Аналогично, $P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(A_3) = 0{,}12;$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0{,}28$$

Вероятность события $\{X = 2\}$: $P(X = 2) = 0{,}07 + 0{,}12 + 0{,}28 = 0{,}47$

Событие $\{X = 0\}$ – произведение всех противоположных событий $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$:

$$\{X = 0\} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$$

Так как события $\bar{A}_i$ независимые, то по теореме умножения вероятностей вероятность события $\{X = 0\}$ равна:

$$P(X = 0) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}03$$

Вероятность события $\{X = 1\}$ находим, исходя из того, что в сумме все вероятности дают единицу:

$$P(X = 1) = 1 - (0{,}28 + 0{,}47 + 0{,}03) = 0{,}22$$

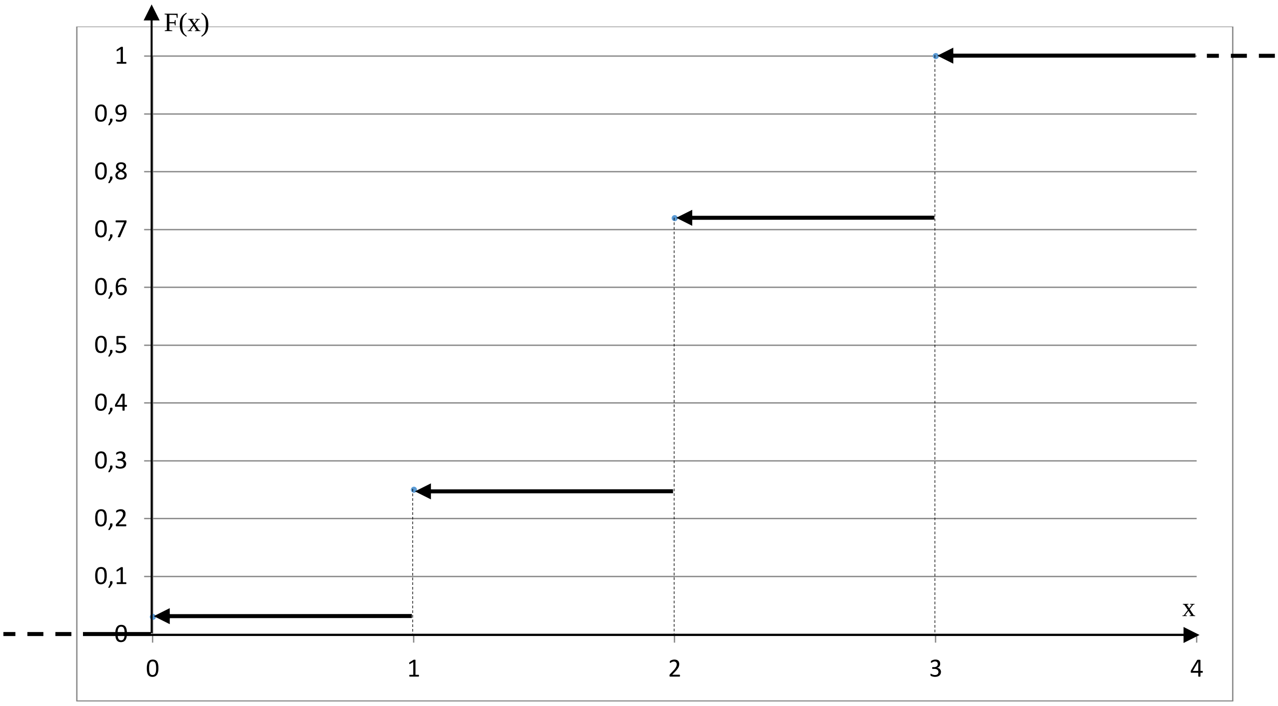
Закон распределения случайной величины X - числа попаданий в мишень:

X	0	1	2	3
P	0,03	0,22	0,47	0,28

Для интегральной функции распределения случайной величины X должно выполняться: $F(x) = P(X < x)$ для всех значений аргумента x. Поэтому:

$$F(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & \text{если } \mathrm{x} \le 0 \\ 0{,}03 & \text{если } 0 < \mathrm{x} \le 1 \\ 0{,}03 + 0{,}22 = 0{,}25 & \text{если } 1 < \mathrm{x} \le 2 \\ 0{,}25 + 0{,}47 = 0{,}72 & \text{если } 2 < \mathrm{x} \le 3 \\ 0{,}72 + 0{,}28 = 1 & \text{если } \mathrm{x} > 3 \end{cases}$$

График функции распределения:



Математическое ожидание дискретной случайной величины X вычисляется по формуле:

$$\mathrm{M(X)} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{x_i p_i}$$

$$\mathrm{M(X)} = 0 \cdot 0{,}03 + 1 \cdot 0{,}22 + 2 \cdot 0{,}47 + 3 \cdot 0{,}28 = 2$$

Дисперсия дискретной случайной величины X вычисляется по формуле:

$$\mathrm{D(X)} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{x_i^2 p_i} - (\mathrm{M(X)})^2$$

$$\mathrm{D(X)} = 0 \cdot 0{,}03 + 1 \cdot 0{,}22 + 4 \cdot 0{,}47 + 9 \cdot 0{,}28 - 2^2 = 0{,}62$$

Вероятности событий $X < 2,\ 0 < X \leq 2$:

$$P(X < 2) = F(2) = 0{,}25$$

$$P(0 < X \leq 2) = P(X = 1) + P(X + 2) = 0{,}22 + 0{,}47 = 0{,}69$$

Или так:

$$P(0 < X \leq 2) = P(1 \leq X < 3) = F(3) - F(1) = 0{,}72 + 0{,}03 = 0{,}69$$

8. Непрерывная случайная величина X имеет плотность вероятности

$$p(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ Ax, 0 \leq x \leq 2 \\ 0, x > 2 \end{cases}$$

Найти: параметр A, интегральную функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины, вероятности событий $X > 1,\ \ 0{,}5 \leq X \leq 1{,}5$.

Параметр А находим из свойства функции $p(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1: \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{0}^{2} Axdx = \frac{Ax^2}{2}\Big|_0^2 = 2\text{A}$$

Отсюда $A = 1/2$:

$$p(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \dfrac{x}{2}, 0 \leq x \leq 2 \\ 0, x > 2 \end{cases}$$

Интегральная функция распределения $F(x)$ выражается через плотность распределения $p(x)$ формулой:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\text{x}} p(x)dx$$

Поэтому при x<0 $F(x) = 0$,

при 0≤x<2:

$$F(x) = \int_0^{x} \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^x = \frac{x^2}{4}$$

при x>2 $F(x) = F(2) = 1$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} \quad \text{при} \quad 0 \le \mathrm{x} \le 2 \\ 1 \ \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

Математическое ожидание $M(X)$ для непрерывной случайной величины X:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Дисперсию будем находить по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - [M(X)]^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{x^4}{8}\Big|_0^2 = 2$$

$$D(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

Вероятности событий $X > 1$, $0{,}5 \le X \le 1{,}5$:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1^2}{4} = 0{,}75$$

$$P(0{,}5 \le X \le 1{,}5) = F(1{,}5) - F(0{,}5) = \frac{1{,}5^2}{4} - \frac{0{,}5^2}{4} = 0{,}5$$

9. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения, с гарантией на 10 лет и средним квадратичным отклонением, равным двум годам. Определить вероятность того, что прибор прослужит более 12 лет.

Вероятность того, что нормально распределённая случайная величина X с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ примет значение из интервала (α, β) равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$$

- функция Лапласа, её значения находятся по таблице.

У нас: a =10, $\sigma = 2$. Вероятность того, что прибор прослужит более 12 лет:

$$P(12 < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{12 - 10}{2}\right) = 0{,}5 - \Phi(1) \approx$$

$$\approx 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$$

10. Через каждый час измерялось напряжение тока в электросети. При этом были получены следующие значения (в В):

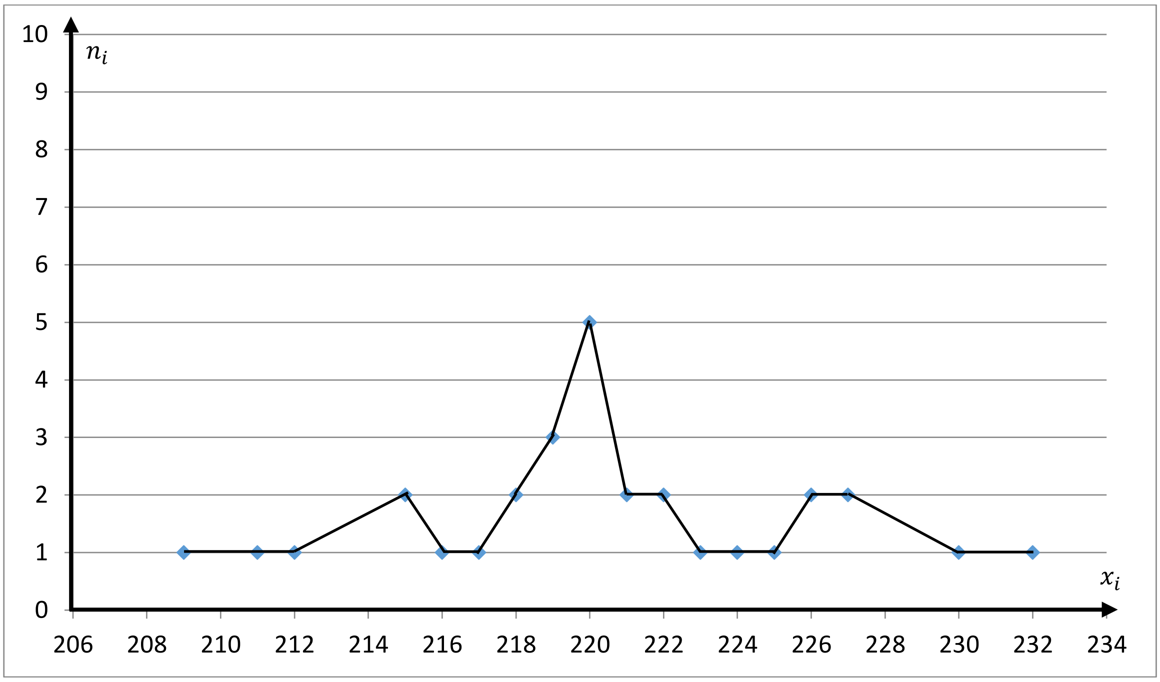
227	219	215	230	232	223	220	222	218	219
222	221	227	226	226	209	211	215	218	220
216	220	220	221	225	224	212	217	219	220

Построить таблицу частот и полигон частот дискретной случайной величины. Найти: а) выборочное среднее $\bar{x}_{\text{В}}$ и выборочную дисперсию $D_{\text{В}}$; б) несмещенную оценку дисперсии s^2.

Объём выборки: $n = 30$, для каждого из принимаемых случайной величиной X значений x_i подсчитываем частоты n_i – сколько раз в выборке случайная величина X принимает это значение, получаем статистический ряд распределения (таблица частот):

x_i	209	211	212	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	230	232
n_i	1	1	1	2	1	1	2	3	5	2	2	1	1	1	2	2	1	1

Построим полигон частот, соединяя ломаной линией точки с координатами (x_i, n_i) :



Заполняем расчётную таблицу:

x_i	n_i	$x_i n_i$	${x_i}^2 n_i$
209	1	209	43681
211	1	211	44521
212	1	212	44944
215	2	430	92450
216	1	216	46656
217	1	217	47089
218	2	436	95048
219	3	657	143883
220	5	1100	242000
221	2	442	97682
222	2	444	98568
223	1	223	49729
224	1	224	50176
225	1	225	50625
226	2	452	102152
227	2	454	103058
230	1	230	52900
232	1	232	53824
$\sum$	30	6614	1458986

Выборочная средняя вычисляется по формуле:

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i$$

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{6614}{30} \approx 220{,}467$$

Выборочная дисперсия вычисляется по формуле (смещённая):

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum {x_i}^2 n_i - (\bar{x}_{\text{В}})^2$$

$$D_{\text{в}} \approx \frac{1458986}{30} - 48605{,}551 \approx 27{,}316$$

Исправленная выборочная дисперсия – несмещённая оценка дисперсии:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}$$

$$s^2 = \frac{30}{29} \cdot 27{,}316 \approx 28{,}258$$

11. Даны среднее квадратичное отклонение $\sigma = 3$, выборочное среднее $\bar{x}_{\text{В}} = 4{,}1$ и объем выборки $n = 36$ нормально распределенного признака генеральной совокупности. Найти доверительный интервалы для оценки математического ожидания генеральной совокупности с заданной надежностью $\gamma = 0{,}95$.

При известной дисперсии (среднем квадратичном отклонении) доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределённой случайной величины находится по формуле:

$$\left(\bar{x}_{\text{В}} - t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \ \bar{x}_{\text{В}} + t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Здесь σ – среднее квадратичное отклонение генеральной совокупности нормально распределённой случайной величины, n – объём выборки, t – значение аргумента функции Лапласа Φ(t), при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$. По таблице для функции Лапласа находим:

$$\Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475 \implies t = 1,96$$

Искомый доверительный интервал для математического ожидания генеральной совокупности:

$$\left(4,1 - 1,96 \times \frac{3}{\sqrt{36}}\ ;\ \ 4,1 + 1,96 \times \frac{3}{\sqrt{36}}\right) =$$

$$= (4,1 - 0,98;\ \ 4,1 + 0,98) = (3,12; 6,08)$$

12. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
$n_i{}'$	5	9	14	16	18	20	10	6	7

Наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \frac{4}{18} + \frac{16}{20} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{4}{7} \approx 2,21$$

По таблице критических точек распределения χ^2 по заданному уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$ (s – число групп) находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{\text{кр}}(0,05;\ \ 6) = 12,6$. Поскольку выполняется $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}(0,05;\ \ 6)$, то нулевую гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности принимаем.