$[\boldsymbol{m = 2, n = 3}]$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения первого порядка.

<u>1.</u> Найти общее решение уравнения:

а) $y' = e^{2x-3y}$ б) $(3x-2y)y' = 2x+3y$ в) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^2$

а) $y' = e^{2x-3y}$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его, разделяя переменные.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{e^{3y}}$$

$$e^{3y}dy = e^{2x}dx$$

Интегрируем обе части:

$$\int e^{3y}dy = \int e^{2x}dx$$

$$\frac{e^{3y}}{3} = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{C}{3}; \quad e^{3y} = \frac{3e^{2x}}{2} + C; \quad 3y = ln\left|\frac{3e^{2x}}{2} + C\right|$$

Общее решение:

$$y = \frac{1}{3}ln\left|\frac{3e^{2x}}{2} + C\right|$$

б) $(3x-2y)y' = 2x+3y$

$$y' = \frac{2x+3y}{3x-2y}$$

Это однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Пусть $t = \frac{y}{x}$, тогда $y = tx\,, y' = t + t'x$

$$y' = \frac{2x+3y}{3x-2y} = \frac{2+\frac{3y}{x}}{3-\frac{2y}{x}} = \frac{2+3t}{3-2t}$$

$$t + t'x = \frac{2+3t}{3-2t}; \qquad t'x = \frac{2+3t}{3-2t} - t = \frac{2t^2+2}{3-2t}$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dt}{dx}x = \frac{2t^2+2}{3-2t}$$

Разделяем переменные:

$$\frac{(2t-3)dt}{2t^2+2} = -\frac{dx}{x}$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{(2t-3)dt}{2t^2+2} = \int -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{(2t-3)dt}{2t^2+2} = \int \frac{tdt}{t^2+1}dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1}dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}ln(t^2+1) - \frac{3}{2}arctgt$$

Получаем:

$$\frac{1}{2}ln(t^2+1) - \frac{3}{2}arctgt = -ln|x| + \frac{C}{2}$$

$$ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) + 2ln|x| - 3arctg\left(\frac{y}{x}\right) = C$$

$$ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) + lnx^2 - 3arctg\left(\frac{y}{x}\right) = C$$

$$ln(x^2+y^2) - 3arctg\left(\frac{y}{x}\right) = C$$

- общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\text{в) } y' + \frac{2y}{x} = x^2$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Находим сначала общее решение однородного $y' + \frac{2y}{x} = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x}; \quad \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{2dx}{x}; \quad \ln|y| = -2\ln|x| + lnC$$

$$y = \frac{C}{x^2}$$

Общее решение исходного ДУ ищем методом вариации постоянной:

$$y = \frac{C(x)}{x^2}$$

$$y' = \frac{C\,'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3}$$

Подставляем y и y' в исходное уравнение:

$$\frac{C\,'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2C(x)}{x^3} = x^2$$

Отсюда:

$$C\,'(x) = x^4 \quad \to C(x) = \int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$$

$$y = \left(\frac{x^5}{5} + C\right) \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{C}{x^2} + \frac{x^3}{5} \quad - \text{общее решение исходного уравнения}$$

<u>2.</u> Скорость роста банковского вклада пропорциональна с коэффициентом равным $m = 2$ величине вклада. Найти закон изменения величины вклада со временем, если первоначальная сумма вклада составляла $n = 3$ миллионов рублей.

Пусть $y(t)$ – функция, выражающая закон изменения величины вклада со временем: $t -$ время нахождения вклада в банке, $y -$ величина вклада в текущий момент времени. Производная этой функции есть скорость изменения (роста) величины вклада. Получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = 2y$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его, разделяя переменные.

$$\frac{dy}{y} = 2dt$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2dt$$

$$ln|y| = 2t + C_1$$

$$y = Ce^{2t} \ - \ \text{общее решение} \ \ (\text{берём } C = e^{C_1})$$

Теперь используем начальное условие: $y(0) = 3$: $Ce^0 = 3 \Longrightarrow C = 3$.

Закон изменения величины вклада со временем:

$$y(t) = 3e^{2t} \ (\text{млн. руб.})$$

Линейные уравнения высших порядков.

<u>1.</u> Решить задачу Коши:

а) $y''' + y'' - 6y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 3$

б) $y'' - 6y' + 9y = (x + 2)e^{5x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3$

а) $y''' + y'' - 6y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 3$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение:

$$k^3 + k^2 - 6k = 0; \ \ k(k^2 + k - 6) = 0; \ \ k(k - 2)(k + 3) = 0$$

Характеристическое уравнение имеет корни:

$k_1 = 0$ – действительный корень кратности 1 - ему соответствуют решение: $e^{k_1 x}$: 1;

$k_2 = -3$ – действительный корень кратности 1 - ему соответствуют решение $e^{k_2 x}$: e^{-3x};

$k_3 = 2$ – действительный корень кратности 1 - ему соответствуют решение $e^{k_3 x}$: e^{2x}.

Общее решение исходного уравнения – линейная комбинация найденных трёх линейно-независимых решений:

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x}$$

Теперь используем заданные начальные условия:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$y' = -3C_2 e^{-3x} + 2C_3 e^{2x};\ \ y'(0) = 2 \Rightarrow -3C_2 + 2C_3 = 2$$

$$y'' = 9C_2 e^{-3x} + 4C_3 e^{2x};\ \ y''(0) = 3 \Rightarrow 9C_2 + 4C_3 = 3$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ -3C_2 + 2C_3 = 2 \\ 9C_2 + 4C_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -\frac{5}{6}, C_2 = -\frac{1}{15}, C_3 = \frac{9}{10}$$

Искомое частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (решение задачи Коши):

$$y = -\frac{5}{6} - \frac{1}{15} e^{-3x} + \frac{9}{10} e^{2x}$$

б) $y'' - 6y' + 9y = (x+2)e^{5x}$, $y(0) = 2, y'(0) = 3$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение: $k^2 - 6k + 9 = 0$; $(k-3)^2 = 0$.

Его корни $k = k_1 = k_2 = 3$ действительные и равные, значит общее решение однородного уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$: $y = (C_1 x + C_2)e^{kx}$

Т.е. $y = (C_1 x + C_2)e^{3x}$.

Общее решение исходного – сумма общего решения однородного и частного решения исходного. Ищем частное решение исходного по виду правой части в виде (учитываем, что 5 – не – корень характеристического уравнения):

$$\tilde{y} = (Ax + B)e^{5x}$$

$$\tilde{y}' = Ae^{5x} + 5(Ax + B)e^{5x} = (5Ax + A + 5B)e^{5x}$$

$$\tilde{y}'' = 5Ae^{5x} + 5(5Ax + A + 5B)e^{5x} = (25Ax + 10A + 25B)e^{5x}$$

Подставляя $\tilde{y}''$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}$ в исходное:

$$(25Ax + 10A + 25B)e^{5x} - 6(5Ax + A + 5B)e^{5x} + 9(Ax + B)e^{5x} = \\ = (x + 2)e^{5x}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 4A + 4B = 2 \end{cases} \rightarrow A = \frac{1}{4},\ \ B = \frac{1}{4}$$

Общее решение исходного:

$$y = (C_1x + C_2)e^{3x} + \frac{1}{4}(x + 1)e^{5x}$$

Теперь используем заданные начальные условия:

$$y(0) = 2 \Longrightarrow C_2 + \frac{1}{4} = 2 \Longrightarrow C_2 = \frac{7}{4}$$

$$y = \left(C_1x + \frac{7}{4}\right)e^{3x} + \frac{1}{4}(x + 1)e^{5x}$$

$$y' = C_1e^{3x} + 3\left(C_1x + \frac{7}{4}\right)e^{3x} + \frac{1}{4}e^{5x} + \frac{5}{4}(x + 1)e^{5x}$$

$$y'(0) = 3 \Longrightarrow C_1 + \frac{21}{4} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = 3 \Longrightarrow C_1 = -\frac{15}{4}$$

Искомое частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (решение задачи Коши):

$$y = \frac{1}{4}(7 - 15x)e^{3x} + \frac{1}{4}(x + 1)e^{5x}$$

РЯДЫ

Числовые ряды.

1. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 - 3k + 3}{1 - 2k + 3k^2}; \qquad \text{б) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+3} + 1}{3^{k+2} + 2}$$

$$\text{в) } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k^2 + 3}{5k^2 + 2}\right)^k; \qquad \text{г) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k + 1}$$

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 - 3k + 3}{1 - 2k + 3k^2}$$

Задан ряд с положительными членами, общий член ряда:

$$a_k = \frac{2k^2 - 3k + 3}{1 - 2k + 3k^2}$$

Предел общего члена при $k \longrightarrow \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k^2 - 3k + 3}{1 - 2k + 3k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2\left(2 - \frac{3}{k} + \frac{3}{k^2}\right)}{k^2\left(3 - \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{k} + \frac{3}{k^2}}{3 - \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{2}{3}$$

Общий член ряда не стремится к нулю – не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Следовательно, ряд расходится.

$$\text{б) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+3} + 1}{3^{k+2} + 2}$$

Задан ряд с положительными членами, общий член ряда:

$$a_k = \frac{2^{k+3} + 1}{3^{k+2} + 2}$$

Применим признак сходимости Даламбера. Вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}:\quad \lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(2^{k+4}+1)(3^{k+2}+2)}{(3^{k+3}+2)(2^{k+3}+1)}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+3}\cdot 3^{k+2}\cdot\left(2+\frac{1}{2^{k+3}}\right)\left(1+\frac{2}{3^{k+2}}\right)}{2^{k+3}\cdot 3^{k+2}\cdot\left(3+\frac{2}{3^{k+2}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k+3}}\right)}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{2^{k+3}}\right)\left(1+\frac{2}{3^{k+2}}\right)}{\left(3+\frac{2}{3^{k+2}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k+3}}\right)}=$$

$$=\frac{(2+0)(1+0)}{(3+0)(1+0)}=\frac{2}{3}$$

Поскольку этот предел существует и меньше единицы, то ряд сходится.

в) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k^2+3}{5k^2+2}\right)^k$$

Задан ряд с положительными членами, общий член ряда:

$$a_k=\left(\frac{2k^2+3}{5k^2+2}\right)^k$$

Применим признак сходимости Коши (радикальный). Вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}:\quad \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k^2+3}{5k^2+2}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2\left(2+\frac{3}{k^2}\right)}{k^2\left(5+\frac{2}{k^2}\right)}=\lim_{k\to\infty}\frac{2+\frac{3}{k^2}}{5+\frac{2}{k^2}}=\frac{2}{5}$$

Поскольку этот предел существует и меньше единицы, то ряд сходится.

г) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{4^k+1}$$

Задан ряд с положительными членами, общий член ряда:

$$a_k=\frac{(2k)!}{4^k+1}$$

Применим признак сходимости Даламбера. Вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}:\quad \lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+2)!\cdot(4^k+1)}{(4^{k+1}+1)\cdot(2k)!}=$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)(2k+2)\cdot 4^k\left(1+\frac{1}{4^k}\right)}{4^k\left(4+\frac{1}{4^k}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)(2k+2)\cdot\left(1+\frac{1}{4^k}\right)}{4+\frac{1}{4^k}} =$$

$$= \frac{+\infty\cdot+\infty\cdot(1+0)}{4+0} = +\infty$$

Поскольку этот предел больше единицы (он бесконечен), то ряд расходится.

2. Исследовать на условную сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды:

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+3}; \qquad \text{б) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos(k\pi)}{5^k+1}$$

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+3}$$

Докажем абсолютную сходимость ряда. Рассмотрим ряд с положительными членами, составленный из абсолютных величин заданного ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3}$$

Применим к этому ряду интегральный признак Коши. Функция $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$ - неотрицательная невозрастающая функция при x>1; интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{A\to+\infty}\left(arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_1^A\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{A\to+\infty}\left(arctg\left(\frac{A}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg(+\infty) - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

- сходится, значит ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3}$ сходится.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+3}$ сходится абсолютно (значит и сходится).

$$б)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos(k\pi)}{5^k+1}$$

Поскольку $cos(k\pi) = (-1)^k$, то ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5^k+1}$$

Докажем абсолютную сходимость этого знакочередующегося ряда. Рассмотрим ряд с положительными членами, составленный из абсолютных величин заданного ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5^k+1}$$

Применим признак сходимости Даламбера. Вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}:\quad \lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{5^k+1}{5^{k+1}+1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{5^k\left(1+\frac{1}{5^k}\right)}{5^k\left(5+\frac{1}{5^k}\right)} = \lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{1}{5^k}}{5+\frac{1}{5^k}} = \frac{1+0}{5+0} = \frac{1}{5}$$

Поскольку этот предел существует и меньше единицы, то ряд сходится.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos(k\pi)}{5^k+1}$ сходится абсолютно (значит и сходится).

3. Найти область сходимости степенного ряда:

$$а)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot k^2+1}{3\cdot k^3+2}\cdot(x-3)^k;\qquad б)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{3k}\cdot x^k}{(2k)!}$$

$$а)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot k^2+1}{3\cdot k^3+2}\cdot(x-3)^k$$

Радиус сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(2k^2+1)(3(k+1)^3+2)}{(3k^3+2)(2(k+1)^2+1)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k^2+1)(3k^3+9k^2+9k+5)}{(2k^2+4k+3)(3k^3+2)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^5\left(2+\frac{1}{k^2}\right)\left(3+\frac{9}{k}+\frac{9}{k^2}+\frac{5}{k^3}\right)}{k^5\left(2+\frac{4}{k}+\frac{3}{k^2}\right)\left(3+\frac{2}{k^3}\right)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{k^2}\right)\left(3+\frac{9}{k}+\frac{9}{k^2}+\frac{5}{k^3}\right)}{\left(2+\frac{4}{k}+\frac{3}{k^2}\right)\left(3+\frac{2}{k^3}\right)} = \frac{2\cdot 3}{2\cdot 3} = 1$$

Интервал сходимости: $|x-3| < 1 : \ (2;4)$.

Исследуем сходимость на концах интервала.

При $x = 2$ получаем знакопеременный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+1}{3k^3+2} \cdot (-1)^k$$

Он сходится по признаку Лейбница: члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю:

$$\frac{2k^2+1}{3k^3+2} > \frac{2(k+1)^2+1}{3(k+1)^3+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6k^5+18k^4+21k^3+19k^2+9k+5 > 6k^5+12k^4+9k^3+4k^2+8k+6$$

- выполняется! ;

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k^2+1}{3k^3+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2+\frac{1}{k^2}}{3k+\frac{2}{k^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

При $x = 4$ получаем ряд с положительными членами:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+1}{3k^3+2}$$

Докажем расходимость этого ряда, сравнив его с другим рядом с положительными членами.

$$\frac{2k^2+1}{3k^3+2} \geq \frac{2k^2}{3k^3+2} \geq \frac{2k^2}{5k^3} = \frac{2}{5k}$$

Если мы докажем расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{5k}$, то по признаку сравнения (первому) ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k^2+1}{3k^3+2}$ также будет расходиться. Применим к ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{5k}$ интегральный признак Коши. Функция $f(x)=\frac{2}{5x}$ - неотрицательная невозрастающая функция при x>1; интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{2dx}{5x} = \lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\frac{2dx}{5x} = \frac{2}{5}\lim_{A\to+\infty}\left(lnx\Big|_1^A\right) = \frac{2}{5}\lim_{A\to+\infty} lnA = +\infty$$

- расходится, значит ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{5k}$ расходится.

Таким образом, область сходимости заданного ряда: $[2;4)$.

$$\text{б)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{3k}\cdot x^k}{(2k)!}$$

Радиус сходимости степенного ряда:

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{2^{3k}\cdot(2k+2)!}{(2k)!\cdot 2^{3k+3}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)(2k+2)}{2^3} = +\infty$$

Интервал сходимости: $|x|<R$; $|x|<+\infty$: $(-\infty,+\infty)$, т.е. степенной ряд всюду сходится.

Ряды Фурье.

1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале:

а) $f(x)=(x-2)^2$ в интервале $(0,2)$

Разложение в ряд Фурье в общем виде (считаем функцию заданной на отрезке [a,b]):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{l}+b_n sin\frac{n\pi x}{l}\right), \text{где}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \ \ (n = 0,1,\dots);\ b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ (n = 1,\dots)$$

Здесь l - половина длина заданного отрезка. У нас $a = 0, b = 2, l = 1$:

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos(n\pi x)dx \ \ (n = 0,1,\dots);\ b_n = \int_0^2 f(x)\sin(n\pi x)dx\ (n = 1,\dots)$$

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos 0 dx = \int_0^2 (x-2)^2\, dx = \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(0+8) = \frac{8}{3}$$

$$a_n = \int_0^2 (x-2)^2\cos(n\pi x)dx = \frac{1}{n\pi}\int_0^2 (x-2)^2\, d\big(\sin(n\pi x)\big) =$$

$$= \frac{(x-2)^2\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 (x-2)\sin(n\pi x)dx =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^2 (x-2)\, d\big(\cos(n\pi x)\big) =$$

$$= \frac{2(x-2)\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Big|_0^2 - \frac{2\sin(n\pi x)}{n^3\pi^3}\Big|_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \int_0^2 (x-2)^2\sin(n\pi x)dx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^2 (x-2)^2\, d\big(\cos(n\pi x)\big) =$$

$$= -\frac{(x-2)^2\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 (x-2)\cos(n\pi x)dx =$$

$$= \frac{4}{n\pi} + \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^2 (x-2)\, d\big(\sin(n\pi x)\big) =$$

$$= \frac{4}{n\pi} + \frac{2(x-2)\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Big|_0^2 + \frac{2\cos(n\pi x)}{n^3\pi^3}\Big|_0^2 = \frac{4}{n\pi}$$

Разложение в ряд Фурье заданной функции:

$$f(x) = \frac{8}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2} \cdot cos(n\pi x) + \frac{4}{n\pi} \cdot sin(n\pi x)\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{cos(n\pi x)}{n^2\pi} + \frac{sin(n\pi x)}{n}\right)$$