

### Задание 1

Вычислить площадь, ограниченную заданными параболой

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$$

РЕШЕНИЕ

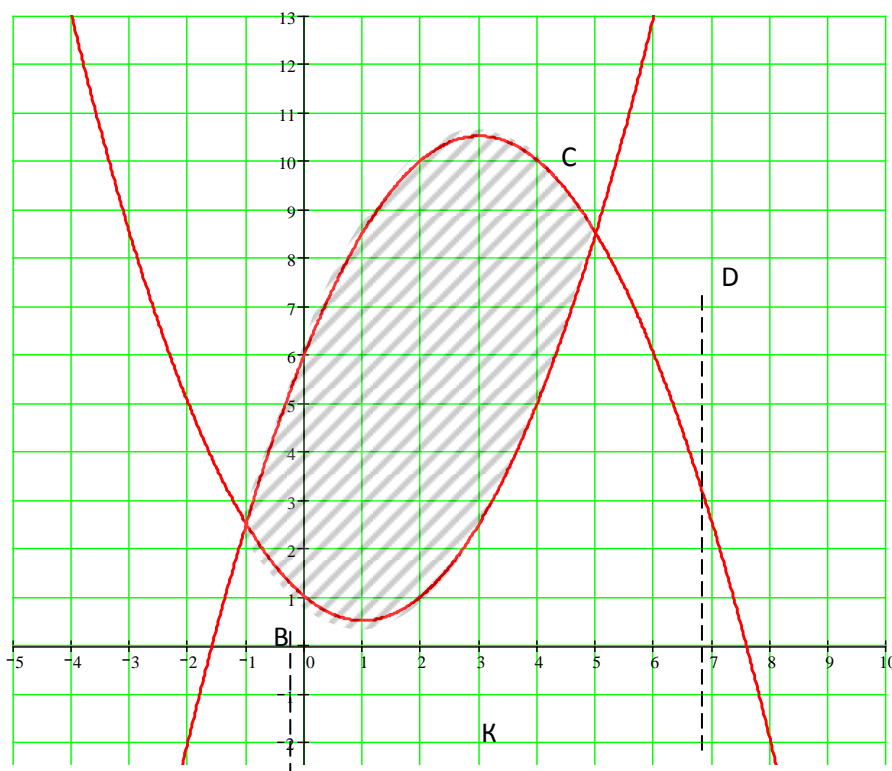
Найдем точки пересечения парабол

$$\frac{1}{2}x^2 - x + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad y_1 = 0,5 + 1 + 1 = 2,5$$

$$x_2 = 5 \quad y_2 = 25/2 - 5 + 1 = 8,5$$



Площадь будет равна разности площадей  $S_{ABCDE}$  и  $S_{ABKDE}$

$$\begin{aligned} S &= S_{ABCDE} - S_{ABKDE} = \int_{-1}^5 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 \right) dx - \int_{-1}^5 \left( \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \right) dx = \\ &= \int_{-1}^5 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1 \right) dx = \int_{-1}^5 \left( -x^2 + 4x + 5 \right) dx = \left( -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x \right) \Big|_{-1}^5 = \\ &= -\frac{125}{3} + 2 \cdot 25 + 5 \cdot 5 - \frac{1}{3} - 2 + 5 = 36 \end{aligned}$$

ОТВЕТ: 36 кв. ед.

## Задание 2

Найти объем тела, образованного вращением оси ОХ фигуры, расположенной в первом квадрате и ограниченной заданной параболой и прямой  $y=2x^2$   $y=-2x^2+4$

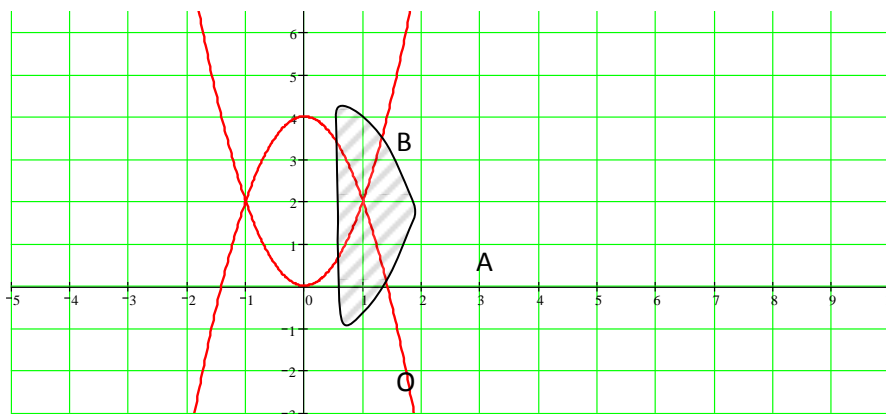
РЕШЕНИЕ

Найдем точки пересечения:

$$2x^2 = -2x^2 + 4$$

$$4x^2 = 4$$

$$x = \pm 1 \quad y = 2$$



По определению объем тела вращения, полученного вращением вокруг оси ОХ криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $x = a$  и  $x = d$  и непрерывной

кривой  $y = f(x)$  определяется по формуле:  $V = \pi \int_c^d f^2(x) dx$

Объем равен разности объемов тел, получаемых при вращении дуги АВ и АО

При вращении фигуры АВ имеем:  $y = -2x^2 + 4 \Rightarrow f(x) = -2x^2 + 4 \quad c = 0 \quad d = 1$

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^1 (-2x^2 + 4)^2 dx = \pi \int_0^1 (4x^4 - 16x^2 + 16) dx = \pi \left( \frac{4x^5}{5} - \frac{16}{3}x^3 + 16x \right) \Big|_0^1 = \\ &= \pi \left( \frac{4}{5} - \frac{16}{3} + 16 \right) = \frac{172\pi}{15} \end{aligned}$$

При вращении ОА имеем:  $y = 2x^2$

$$V_2 = \pi \int_0^1 (2x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 4x^4 dx = \pi \left( \frac{4x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{5}$$

ОТВЕТ:  $\frac{32\pi}{3}$  куб. ед.

$$V = V_1 - V_2 = \frac{172\pi}{15} - \frac{4\pi}{5} = \frac{32\pi}{3}$$

### Задание 3

Задана плотность распределения непрерывной случайной величины  $X$

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \cos x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{при } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти функцию распределения  $F(x)$ .

РЕШЕНИЕ

Найдем функцию распределения  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$

$$1) \text{ при } x \leq 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$$

$$2) \text{ при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \cos x dx = \sin x \Big|_0^x = \\ = \sin x - \sin 0 = \sin x$$

$$3) \text{ при } x > \frac{\pi}{2} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0 dx = (\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

#### Задание 4

Дано, что детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределены по нормальному закону. Стандартная длина диаметра детали (математическое ожидание) равна  $a$  мм, среднее квадратическое отклонение  $-\sigma$  мм. Найти:

- 1) Вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет больше  $\alpha$  мм и меньше  $\beta$  мм
- 2) Вероятность того, что диаметр детали отклонится от стандартной длины не более чем на  $\delta$  мм.

$$a=48, \sigma=4, \alpha=45, \beta=56, \delta=3$$

#### РЕШЕНИЕ

Вероятность попадания нормальной случайной величины в интервал  $(\alpha; \beta)$  вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

$$P(45 < X < 56) = \Phi\left(\frac{56 - 48}{4}\right) - \Phi\left(\frac{45 - 48}{4}\right) = \Phi(2) - \Phi(-0,75) = \Phi(2) + \Phi(0,75) =$$

Значение  $\Phi(2)$  и  $\Phi(0,75)$  находим по таблице значений функции Лапласа:

$$\Phi(2) = 0,4772$$

$$\Phi(0,75) = 0,2734$$

$$P(45 < X < 56) = 0,4772 + 0,2734 = 0,7506$$

- 2) Вероятность попадания нормальной случайной величины в симметричный относительно математического ожидания интервал находится по формуле:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

$$P(|X - 48| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{4}\right) = 2\Phi(0,75) \approx 2 \cdot 0,2734 = 0,5468$$

ОТВЕТ: 1) 0,7506 2) 0,5468