Задание 1

Вычислить площадь, ограниченную заданными параболами

$y=\frac{1}{2}x^2-x+1 \quad y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$

РЕШЕНИЕ

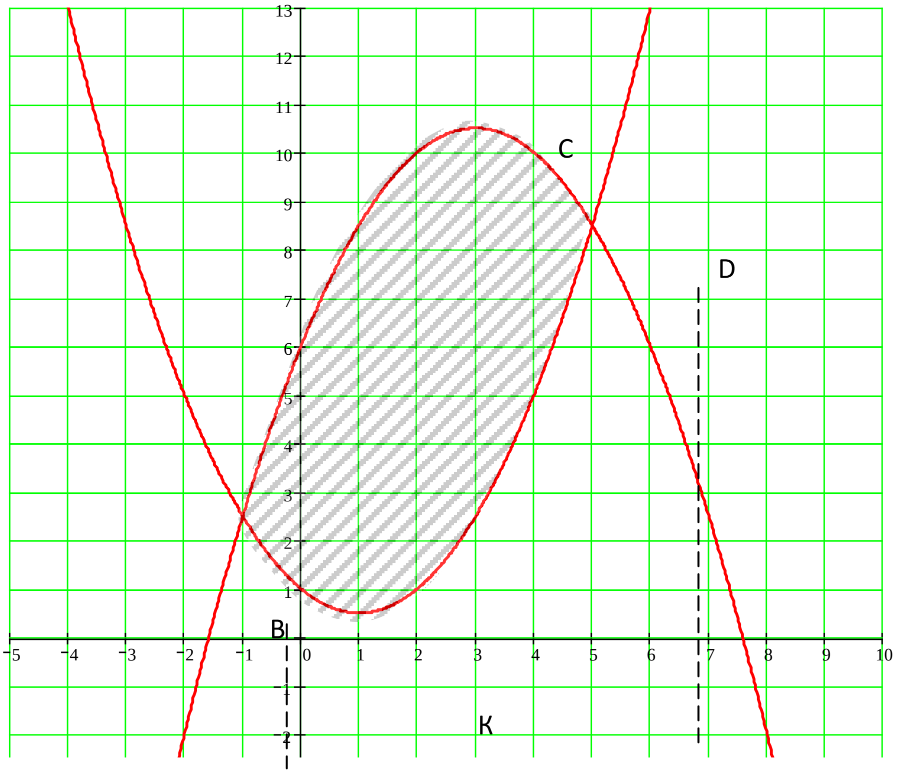
Найдем точки пересечения парабол

$\frac{1}{2}x^2-x+1 = -\frac{1}{2}x^2+3x+6$

$x^2-4x-5=0$

$x_1=-1 \quad y_1=0,5+1+1=2,5$

$x_2=5 \quad y_2=25/2-5+1=8,5$



Площадь будет равна разности площадей S_{ABCDE} и S_{ABKDE}

$$S=S_{ABCDE}-S_{ABKDE}=\int_{-1}^{5}\left(-\frac{1}{2}x^2+3x+6\right)dx-\int_{-1}^{5}\left(\frac{1}{2}x^2-x+1\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{5}\left(-\frac{1}{2}x^2+3x+6-\frac{1}{2}x^2+x-1\right)dx=\int_{-1}^{5}\left(-x^2+4x+5\right)dx=\left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right)\Bigg|_{-1}^{5}=$$

$$=-\frac{125}{3}+2\cdot 25+5\cdot 5-\frac{1}{3}-2+5=36$$

ОТВЕТ: 36 кв. ед.

Задание 2

Найти объем тела, образованного вращением оси ОХ фигуры, расположенной в первом квадрате и ограниченной заданной параболой и прямой $y=2x^2$ $y=-2x^2+4$

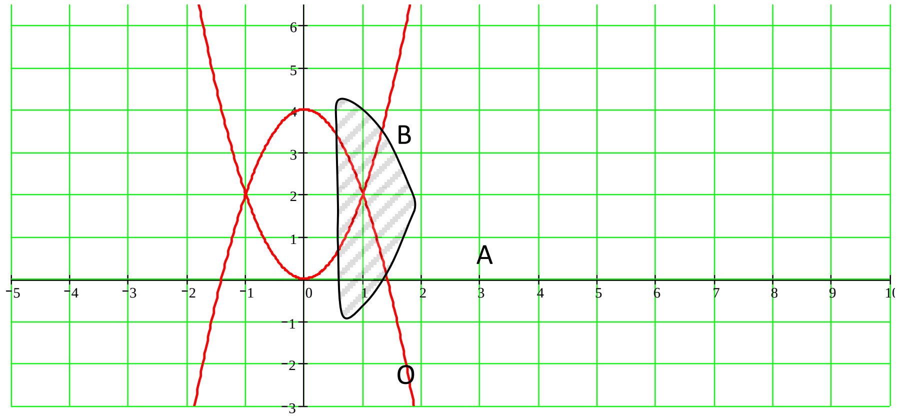
РЕШЕНИЕ

Найдем точки пересечения:

$2x^2=-2x^2+4$

$4x^2=4$

$x=\pm 1$ $y=2$



По определению объем тела вращения, полученного вращением вокруг оси ОХ криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = d$ и непрерывной кривой $y = f(x)$ определяется по формуле: $V = \pi \int\limits_c^d f^2(x)dx$

Объем равен разности объемов тел, получаемых при вращении дуги АВ и АО

При вращении фигуры АВ имеем: $y=-2x^2+4 \Rightarrow f(x) = -2x^2 + 4 \quad c=0 \; d=1$

$$V_1 = \pi \int\limits_0^1 (-2x^2+4)^2 dx = \pi \int\limits_0^1 (4x^4 - 16x^2 + 16)dx = \pi \left(\frac{4x^5}{5} - \frac{16}{3}x^2 + 16x \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi \left(\frac{4}{5} - \frac{16}{3} + 16 \right) = \frac{172\pi}{15}$$

При вращении ОА имеем: $y=2x^2$

$$V_2 = \pi \int\limits_0^1 (2x^2)^2 dx = \pi \int\limits_0^1 4x^4 dx = \pi \left(\frac{4x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{4\pi}{5}$$

ОТВЕТ: $\frac{32\pi}{3}$ куб. ед.

$$V = V_1 - V_2 = \frac{172\pi}{15} - \frac{4\pi}{5} = \frac{32\pi}{3}$$

Задание 3

Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X^

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \cos x \text{ при } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, \text{при } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти функцию распределения F(x).

РЕШЕНИЕ

Найдем функцию распределения F(x)= $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

$$1)\ \text{при} \quad x \le 0 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dx = 0$$

$$2)\ \text{при} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{2} \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{x} \cos x\ dx = \sin x\Big|_0^x =$$

$$= \sin x - \sin 0 = \sin x$$

$$3)\ \text{при} \quad x > \frac{\pi}{2} \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0\ dx = (\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0 \\ \sin x,\ 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1,\ x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Задание 4

Дано, что детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределены по нормальному закону. Стандартная длина диаметра детали (математическое ожидание) равна амм, среднее квадратическое отклонение –σ мм. Найти:

1) Вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет больше α мм и меньше β мм

2) Вероятность того, что диаметр детали отклонится от стандартной длины не более чем на δ мм.

a=48, σ=4, α=45, β=56, δ=3

РЕШЕНИЕ

Вероятность попадания нормальной случайной величины в интервал (α;β) вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

$$P(45 < X < 56) = \Phi\left(\frac{56-48}{4}\right) - \Phi\left(\frac{45-48}{4}\right) = \Phi(2) - \Phi(-0{,}75) = \Phi(2) + \Phi(0{,}75) =$$

Значение $\Phi(2)$ и $\Phi(0{,}75)$ находим по таблице значений функции Лапласа:

$\Phi(2) = 0{,}4772$

$\Phi(0{,}75) = 0{,}2734$

$P(45 < X < 56) = 0{,}4772 + 0{,}2734 = 0{,}7506$

2) Вероятность попадания нормальной случайной величины в симметричный относительно математического ожидания интервал находится по формуле:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

$$P(|X-48|<3)=2\Phi\left(\frac{3}{4}\right) = 2\Phi(0{,}75) \approx 2 \cdot 0{,}2734 = 0{,}5468$$

ОТВЕТ: 1) 0,7506   2) 0,5468