

Контрольная работа №1.

15.1.45. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения. Сделать проверку.

$$xy^4 y' = y^5 + x^5$$

Решение:

$$xy^4 y' = y^5 + x^5$$

$$y' - \frac{y}{x} = x^4 y^{-4}$$

Это уравнение Бернулли.

$$y^4 y' - \frac{y^5}{x} = x^4$$

Сделаем замену:

$$z = y^5; z' = 5y^4 y'$$

Тогда

$$\frac{1}{5} z' - \frac{z}{x} = x^4$$
$$z' - \frac{5z}{x} = x^4$$

Решение ищем в виде:

$$z = uv; z' = u'v + v'u.$$

$$u'v + v'u - \frac{5uv}{x} = x^4$$

$$u'v + u \left(v' - \frac{5v}{x} \right) = x^4$$

$$v' - \frac{5v}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{5v}{x} \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = \frac{5dx}{x} \Leftrightarrow \ln|v| = 5 \ln|x| \Leftrightarrow v = x^5$$

$$u'x^5 = x^4 \Leftrightarrow u = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$z = uv = x^5 (\ln|x| + C)$$

$$y^5 = x^5 (\ln|x| + C)$$

$$y = x \sqrt[5]{\ln|x| + C}$$

Проверка:

$$y' = \sqrt[5]{\ln|x|+C} + x \cdot \frac{1}{5\sqrt[5]{(\ln|x|+C)^4}} \cdot \frac{1}{x} = \sqrt[5]{\ln|x|+C} + \frac{1}{5\sqrt[5]{(\ln|x|+C)^4}} = \frac{\ln|x|+C+1}{5\sqrt[5]{(\ln|x|+C)^4}}$$

$$x \cdot x^4 \sqrt[5]{(\ln|x|+C)^4} \frac{\ln|x|+C+1}{5\sqrt[5]{(\ln|x|+C)^4}} = x^5 \ln|x|+C+x^5$$

$$x^5 \cdot \frac{\ln|x|+C+1}{1} = x^5 \ln|x|+C+x^5$$

$$x^5 (\ln|x|+C+1) = x^5 (\ln|x|+C+1) - \text{верно}$$

15.1.105. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения. Сделать проверку.

$$3(x^2 y + y)dy + \sqrt{9 + y^2} dx = 0, \quad y(0) = 0$$

Решение:

Решим уравнение с разделяющимися переменными:

$$3(x^2 y + y)dy + \sqrt{9 + y^2} dx = 0$$

$$\frac{3ydy}{\sqrt{9 + y^2}} = -\frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\frac{3}{2} \frac{d(9 + y^2)}{\sqrt{9 + y^2}} = -\frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$3\sqrt{9 + y^2} + \arctg x = C$$

$$y(0) = 0:$$

$$3\sqrt{9 + 0^2} + \arctg 0 = C \Leftrightarrow C = 9$$

$$3\sqrt{9 + y^2} + \arctg x = 9$$

Выполним проверку, для этого продифференцируем полученное решение:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{9 + y^2}} \cdot y' + \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

$$\frac{3y}{\sqrt{9 + y^2}} \cdot dy + \frac{1}{1 + x^2} dx = 0$$

$$3y(1 + x^2)dy + \sqrt{9 + y^2} dx = 0$$

$$3(x^2 y + y)dy + \sqrt{9 + y^2} dx = 0 - \text{верно}$$

15.2.65. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения.

Сделать проверку.

$$y'' - 10y' + 34y = 0$$

Решение:

Характеристическое уравнение:

$$k^2 - 10k + 34 = 0$$

$$D = 25 - 34 = -9$$

$$k_1 = 5 - 3i, k_2 = 5 + 3i$$

$$y = e^{5x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

Проверка:

$$y' = 5e^{5x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{5x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x)$$

$$\begin{aligned} y'' &= 25e^{5x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + 5e^{5x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) + \\ &+ 5e^{5x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) + e^{5x} (-9C_1 \cos 3x - 9C_2 \sin 3x) = \\ &= e^{5x} (16C_1 \cos 3x + 16C_2 \sin 3x - 30C_1 \sin 3x + 30C_2 \cos 3x) \end{aligned}$$

Подставим в уравнение:

$$\begin{aligned} e^{5x} (16C_1 \cos 3x + 16C_2 \sin 3x - 30C_1 \sin 3x + 30C_2 \cos 3x) - 50e^{5x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \\ - 10e^{5x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) + 34e^{5x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = 0 \end{aligned}$$

$$16C_1 \cos 3x - 50C_1 \cos 3x + 34C_1 \cos 3x + 16C_2 \sin 3x - 50C_2 \sin 3x + 34C_2 \sin 3x - 30C_1 \sin 3x + \\ + 30C_1 \sin 3x + 30C_2 \cos 3x - 30C_2 \cos 3x = 0$$

$$0 = 0 - \text{верно}$$

11.1.35. Выяснить, для каких рядов выполняется необходимое условие сходимости?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-4n-5n^2}{3n^4+2n+1} \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-3n^2}{2n+7} \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+2n+3}{7n-5n^4}$$

Решение:

Необходимое условие сходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-4n-5n^2}{3n^4+2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3/n^2 - 4/n - 5}{3n^2 + 2/n + 1/n^2} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3n^2} = 0 - \text{выполняется}$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-3n^2}{2n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4/n - 3n}{2 + 7/n} = \infty \neq 0 - \text{не выполняется}$$

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+2n+3}{7n-5n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 2/n + 3/n^2}{7/n - 5n^2} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5n^2} = 0 - \text{выполняется}$$

11.2.35. При каких значениях p из множества $\{0,1,2,3,4,5\}$ заданный ряд сходится абсолютно?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n-1}{2n^p}$$

Решение:

Знакопеременный ряд сходится абсолютно, если сходится ряд из его абсолютных величин и выполняются критерии признака Лейбница.

Рассмотри ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{2n^p}$$

Применим признак сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{2n^p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2n^p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}}.$$

Ряд будет сходиться при $p-1 > 1$, откуда $p > 2$

Тогда исходный ряд сходится по признаку сравнения при $p = 3, 4, 5$.

При этих же значениях будут выполнены условия признака Лейбница:

1. Члены ряда убывают по модулю.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

Ответ: при $p = 3, 4, 5$

11.3.15. Определить область сходимости степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \cdot x^n$$

Решение:

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} |x^{n+1}|}{\frac{3^n}{n!} |x^n|} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} n!}{3^n (n+1)n!} = |x| \cdot \frac{3}{\infty} = |x| \cdot 0$$

Итак, ряд сходится при $|x| \cdot 0 < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; \infty)$.

Контрольная работа №2.

11.3.85. Разложить функцию $f(x)$, заданную на отрезке I , в ряд Фурье по косинусам.

$$f(x) = \sin x, \quad I = [0, \pi]$$

Решение:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{2}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi} (-1 - 1) = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x + \sin(1-n)x] dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi(n+1)} \cos(n+1)x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi(1-n)} \cos(1-n)x \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(n+1)\pi}{1+n} + \frac{\cos(1-n)\pi}{1-n} - \left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n} \right) \right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos n\pi}{1+n} - \frac{\cos n\pi}{1-n} - \frac{2}{1-n^2} \right) = -\frac{1}{\pi} \left(-\frac{2 \cdot (-1)^n}{1-n^2} - \frac{2}{1-n^2} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{1-n^2}$$

$$a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{4}{\pi(1-4k^2)}, \quad \text{и т.к. } (-1)^{2k}=1, \quad (-1)^{2k+1}=-1, \text{ то}$$

искомый ряд Фурье данной функции имеет вид:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{1-4k^2}$$

17.1.25. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадёт в мишень равна 0,9. Стрелок сделал 3 выстрела. Какова вероятность, что он попадёт только один раз?

Решение:

По формуле Бернулли $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$$p_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1! 2!} \cdot 0.9^1 \cdot 0.1^2 = 3 \cdot 0.9 \cdot 0.01 = 0.027$$

17.2.15. Вероятность того, что прибор исправен равна 0,8. X – число исправных приборов из двух выбранных. Найти математическое ожидание случайной величины X .

Решение:

Среди двух выбранных изделий, может оказаться 0, 1 или 2 исправных приборов.

$$P(X = 0) = 0,2 * 0,2 = 0,04$$

$$P(X = 1) = 0,8 * 0,2 + 0,2 * 0,8 = 0,32$$

$$P(X = 2) = 0,8 * 0,8 = 0,64$$

Проверка: $0,04 + 0,32 + 0,64 = 1$ – верно

Закон распределения:

X	0	1	2
P	0,04	0,32	0,64

Математическое ожидание:

$$M(X) = 0 * 0,04 + 1 * 0,32 + 2 * 0,64 = 1,6.$$

17.2.35. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2 , причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1 , математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$. Найти закон распределения случайной величины X .

$$p_1 = 0,9$$

$$M(X) = 3,1$$

$$D(X) = 0,09$$

Решение:

$$p_1 + p_2 = 1 \quad ; \quad p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 0,9 x_1 + 0,1 x_2 = 3,1$$

$$D(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - (M(X))^2 = 0,9 x_1^2 + 0,1 x_2^2 - 3,1^2 = 0,09$$

Получаем систему уравнений:

$$0,9 x_1 + 0,1 x_2 = 3,1$$

$$0,9 x_1^2 + 0,1 x_2^2 - 9,7 = 0$$

Или

$$9x_1 + x_2 = 31$$

$$9x_1^2 + x_2^2 - 97 = 0$$

Из первого уравнения выражаем $x_2 = 31 - 9x_1$ и подставляем во второе уравнение:

$$9x_1^2 + (31 - 9x_1)^2 - 97 = 0$$

$$90x_1^2 - 558x_1 + 864 = 0$$

$$45x_1^2 - 279x_1 + 432 = 0$$

$$D = 279^2 - 4 \cdot 45 \cdot 432 = 81$$

$$x = \frac{279 \pm 9}{90}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 3.2$$

При $x_1 = 3$, $x_2 = 31 - 9 \cdot 3 = 4$, $x_1 < x_2$

При $x_1 = 3.2$, $x_2 = 31 - 9 \cdot 3.2 = 2.2$, $x_1 > x_2$

Следовательно $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

x_i	3	4
p_i	0.9	0.1

Контрольная работа №3.

17.3.5. Известны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X . Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал $(\alpha; \beta)$

$$a = 6; \sigma = 3; \alpha = 2; \beta = 11$$

Решение:

Вероятность попадания нормально распределенной величины в заданный интервал определяется через функцию Лапласа формулой:

$$p(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

$$p(2 < x < 11) = \Phi\left(\frac{11 - 6}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2 - 6}{3}\right) = \Phi(1.67) - \Phi(-1.33) = 0,4525 + 0,4082 = 0,8607$$

19.1.45. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Статистическое распределение представлено в таблице:

x	3	5	7	8	10	12	14
n	3	7	4	6	7	5	8

Найти с надёжностью 0,95 доверительный интервал для оценки математического ожидания.

Для нахождения числовых характеристик составим расчётную таблицу:

x_i	3	5	7	8	10	12	14	Сумма
n_i	3	7	4	6	7	5	8	40
$x_i n_i$	9	35	28	48	70	60	112	362
$x_i^2 n_i$	27	175	196	384	700	720	1568	3770

Находим выборочную среднюю: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i n_i = \frac{362}{40} = 9.05$

Находим выборочную дисперсию:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 n_i - (\bar{x})^2 = \frac{3770}{40} - 9,05^2 = 12.35$$

Выборочное среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{12.35} = 3,51$$

Для оценки математического ожидания используем доверительный интервал:

$$\bar{x} - \frac{\sigma \cdot t}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{\sigma \cdot t}{\sqrt{n}},$$

где по таблицам $t = t(\gamma, n)$ находим $t = 1,984$.

Находим доверительный интервал:

$$9,05 - \frac{3,51 \cdot 1,984}{\sqrt{40}} < a < 9,05 + \frac{3,51 \cdot 1,984}{\sqrt{40}};$$

$$7,95 < a < 10,15.$$

19.2.5. Данные наблюдений над двумерной случайной величиной (X, Y) представлены в корреляционной таблице. Методом наименьших квадратов найти выборочное уравнение прямой регрессии Y на X . Построить график уравнения регрессии и показать точки (x, \bar{y}_x) , рассчитанные по таблице.

X	Y					n_x
	20	30	40	50	60	
20	7	3	-	-	-	10
30	52	110	13	1	-	176
40	1	14	23	2	-	40
50	-	1	4	6	1	12
60	-	-	-	3	6	9
70	-	-	-	-	3	3
n_y	60	128	40	12	10	250

Решение:

Уравнение линейной регрессии y на x имеет вид: $y_x = \bar{y} + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$

Найдем необходимые числовые характеристики.

$$\bar{x} = (20(7 + 3) + 30(52 + 110 + 13 + 1) + 40(1 + 14 + 23 + 2) + 50(1 + 4 + 6 + 1) + 60(3 + 6) + 70(3))/250 = 33.72$$

$$\bar{y} = (20(7 + 52 + 1) + 30(3 + 110 + 14 + 1) + 40(13 + 23 + 4) + 50(1 + 2 + 6 + 3) + 60(1 + 6 + 3))/250 = 31.36$$

Дисперсии:

$$\sigma_x^2 = (20^2(7 + 3) + 30^2(52 + 110 + 13 + 1) + 40^2(1 + 14 + 23 + 2) + 50^2(1 + 4 + 6 + 1) + 60^2(3 + 6) + 70^2(3))/250 - 33.72^2 = 76.96$$

$$\sigma_y^2 = (20^2(7 + 52 + 1) + 30^2(3 + 110 + 14 + 1) + 40^2(13 + 23 + 4) + 50^2(1 + 2 + 6 + 3) + 60^2(1 + 6 + 3))/250 - 31.36^2 = 93.35$$

Откуда получаем среднеквадратические отклонения:

$$\sigma_x = 8.77 \text{ и } \sigma_y = 9.66$$

и ковариация:

$$\text{Cov}(x,y) = (20 \cdot 20 \cdot 7 + 30 \cdot 20 \cdot 52 + 40 \cdot 20 \cdot 1 + 20 \cdot 30 \cdot 3 + 30 \cdot 30 \cdot 110 + 40 \cdot 30 \cdot 14 + 50 \cdot 30 \cdot 1 + 30 \cdot 40 \cdot 13 + 40 \cdot 40 \cdot 23 + 50 \cdot 40 \cdot 4 + 30 \cdot 50 \cdot 1 + 40 \cdot 50 \cdot 2 + 50 \cdot 50 \cdot 6 + 60 \cdot 50 \cdot 3 + 50 \cdot 60 \cdot 1 + 60 \cdot 60 \cdot 6 + 70 \cdot 60 \cdot 3)/250 - 33.72 \cdot 31.36 = 66.54$$

Определим коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$r_{xy} = \frac{66.54}{8.77 \cdot 9.66} = 0.79$$

Запишем уравнения линий регрессии $y(x)$:

$$y_x = 31.36 + 0.79 \cdot \frac{9.66}{8.77} (x - 33.72)$$

и вычисляя, получаем:

$$y_x = 0.86x + 2.21$$

Построив точки, определяемые таблицей и линии регрессии, увидим, что обе линии проходят через точку с координатами (33.72; 31.36) и точки расположены близко к линиям регрессии.



