Контрольная работа №1.

15.1.45. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения. Сделать проверку.

$xy^4y' = y^5 + x^5$

Решение:

$xy^4y' = y^5 + x^5$

$y' - \frac{y}{x} = x^4y^{-4}$

Это уравнение Бернулли.

$$y^4y' - \frac{y^5}{x} = x^4$$

Сделаем замену:

$$z = y^5; z' = 5y^4y'$$

Тогда

$$\frac{1}{5}z' - \frac{z}{x} = x^4$$
$$z' - \frac{5z}{x} = x^4.$$

Решение ищем в виде:

$$z = uv; z' = u'v + v'u.$$

$u'v + v'u - \frac{5uv}{x} = x^4$

$u'v + u\left(v' - \frac{5v}{x}\right) = x^4$

$v' - \frac{5v}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{5v}{x} \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = \frac{5dx}{x} \Leftrightarrow \ln|v| = 5\ln|x| \Leftrightarrow v = x^5$

$u'x^5 = x^4 \Leftrightarrow u = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$z = uv = x^5(\ln|x| + C)$

$y^5 = x^5(\ln|x| + C)$

$y = x\sqrt[5]{\ln|x| + C}$

Проверка:

$$y'=\sqrt[5]{\ln|x|+C}+x\cdot\frac{1}{5\sqrt[5]{\left(\ln|x|+C\right)^4}}\cdot\frac{1}{x}=\sqrt[5]{\ln|x|+C}+\frac{1}{5\sqrt[5]{\left(\ln|x|+C\right)^4}}=\frac{\ln|x|+C+1}{5\sqrt[5]{\left(\ln|x|+C\right)^4}}$$

$$x\cdot x^4\sqrt[5]{\left(\ln|x|+C\right)^4}\,\frac{\ln|x|+C+1}{5\sqrt[5]{\left(\ln|x|+C\right)^4}}=x^5\ln|x|+C+x^5$$

$$x^5\cdot\frac{\ln|x|+C+1}{1}=x^5\ln|x|+C+x^5$$

$$x^5\left(\ln|x|+C+1\right)=x^5\left(\ln|x|+C+1\right)-\textit{верно}$$

15.1.105. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения. Сделать проверку.

$$3(x^2y+y)dy+\sqrt{9+y^2}dx=0,\quad y(0)=0$$

Решение:

Решим уравнение с разделяющимися переменными:

$$3(x^2y+y)dy+\sqrt{9+y^2}dx=0$$

$$\frac{3ydy}{\sqrt{9+y^2}}=-\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$\frac{3}{2}\frac{d\left(9+y^2\right)}{\sqrt{9+y^2}}=-\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$3\sqrt{9+y^2}+\mathrm{ar}\,ctgx=C$$

$$y(0)=0:$$

$$3\sqrt{9+0^2}+\mathrm{ar}\,ctg0=C\Leftrightarrow C=9$$

$$3\sqrt{9+y^2}+\mathrm{ar}\,ctgx=9$$

Выполним проверку, для этого продифференцируем полученное решение:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2y}{\sqrt{9+y^2}}\cdot y'+\frac{1}{1+x^2}=0$$

$$\frac{3y}{\sqrt{9+y^2}}\cdot dy+\frac{1}{1+x^2}dx=0$$

$$3y\left(1+x^2\right)dy+\sqrt{9+y^2}dx=0$$

$$3(x^2y+y)dy+\sqrt{9+y^2}dx=0-\textit{верно}$$

15.2.65. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения. Сделать проверку.

$y''-10y'+34y=0$

Решение:

$\textit{Характерестическое уравнение}:$

$k^2-10k+34=0$

$D=25-34=-9$

$k_1=5-3i,\ k_2=5+3i$

$y=e^{5x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)$

$\textit{Проверка}:$

$y'=5e^{5x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)+e^{5x}\left(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x\right)$

$y''=25e^{5x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)+5e^{5x}\left(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x\right)+$

$+5e^{5x}\left(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x\right)+e^{5x}\left(-9C_1\cos 3x-9C_2\sin 3x\right)=$

$=e^{5x}\left(16C_1\cos 3x+16C_2\sin 3x-30C_1\sin 3x+30C_2\cos 3x\right)$

$\textit{Подставим в уравнение}:$

$e^{5x}\left(16C_1\cos 3x+16C_2\sin 3x-30C_1\sin 3x+30C_2\cos 3x\right)-50e^{5x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)-$

$-10e^{5x}\left(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x\right)+34e^{5x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)=0$

$16C_1\cos 3x-50C_1\cos 3x+34C_1\cos 3x+16C_2\sin 3x-50C_2\sin 3x+34C_2\sin 3x-30C_1\sin 3x+$

$+30C_1\sin 3x+30C_2\cos 3x-30C_2\cos 3x=0$

$0=0-\textit{верно}$

11.1.35. Выяснить, для каких рядов выполняется необходимое условие сходимости?

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-4n-5n^2}{3n^4+2n+1}\qquad б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-3n^2}{2n+7}\qquad в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+2n+3}{7n-5n^4}$

Решение:

Необходимое условие сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3-4n-5n^2}{3n^4+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3/n^2-4/n-5}{3n^2+2/n+1/n^2}=-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{3n^2}=0\ -\ \textit{выполняется}$$

$$б)\ \lim_{n\to\infty}\frac{4-3n^2}{2n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{4/n-3n}{2+7/n}=\infty\neq 0-\textit{не}\quad \textit{выполняется}$$

$$в)\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2n+3}{7n-5n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+2/n+3/n^2}{7/n-5n^2}=-\lim_{n\to\infty}\frac{4}{5n^2}=0\ -\ \textit{выполняется}$$

11.2.35. При каких значениях p из множества {0,1,2,3,4,5} заданный ряд сходится абсолютно?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n-1}{2n^p}$$

Решение:

Знакопеременный ряд сходится абсолютно, если сходится ряд из его абсолютных величин и выполняются критерии признака Лейбница.

Рассмотри ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{2n^p}$$

Применим признак сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{2n^p}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{2n^p}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-1}}.$$

Ряд будет сходится при $p-1>1$, откуда $p>2$

Тогда исходный ряд сходится по признаку сравнения при p = 3,4,5.

При этих же значениях будут выполнены условия признака Лейбница:

1. Члены ряда убывают по модулю.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

Ответ: при p =3,4,5

11.3.15. Определить область сходимости степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\cdot x^n$$

Решение:

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right|}{\frac{3^n}{n!}\left|x^n\right|}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n!}{3^n(n+1)n!}=|x|\cdot\frac{3}{\infty}=|x|\cdot 0$$

Итак, ряд сходится при $|x|\cdot 0<1\Leftrightarrow x\in(-\infty;\infty)$.

Контрольная работа №2.

11.3.85. Разложить функцию f(x), заданную на отрезке I, в ряд Фурье по косинусам.

$$f(x)=\sin x, \quad I=[0,\pi]$$

Решение:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx=-\frac{2}{\pi}\cos x\Big|_0^\pi=-\frac{2}{\pi}(-1-1)=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi\left[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x\right]dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi(n+1)}\cos(n+1)x\Big|_0^\pi-\frac{1}{\pi(1-n)}\cos(1-n)x\Big|_0^\pi=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)\pi}{1+n}+\frac{\cos(1-n)\pi}{1-n}-\left(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos n\pi}{1+n}-\frac{\cos n\pi}{1-n}-\frac{2}{1-n^2}\right)=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\cdot(-1)^n}{1-n^2}-\frac{2}{1-n^2}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{1-n^2}$$

$a_{2k-1}=0,\ a_{2k}=\dfrac{4}{\pi\left(1-4k^2\right)}$, и т.к $(-1)^{2k}=1$, $(-1)^{2k+1}=-1$, то

искомый ряд Фурье данной функции имеет вид:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{1-4k^2}$$

17.1.25. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадёт в мишень равна 0,9. Стрелок сделал 3 выстрела. Какова вероятность, что он попадёт только один раз?

Решение:

По формуле Бернулли $p_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$

$$p_3(1)=C_3^1p^1q^2=\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot 0.9^1\cdot 0.1^2=3\cdot 0.9\cdot 0.01=0.027$$

17.2.15. Вероятность того, что прибор исправен равна 0,8. X – число исправных приборов из двух выбранных. Найти математическое ожидание случайной величины X.

Решение:

Среди двух выбранных изделий, может оказаться 0, 1 или 2 исправных приборов.

$P(X = 0) = 0{,}2*0{,}2 = 0{,}04$

$P(X = 1) = 0{,}8*0{,}2+0{,}2*0{,}8 = 0{,}32$

$P(X = 2) = 0{,}8*0{,}8 = 0{,}64$

Проверка: 0,04+0,32+0,64 = 1 – верно

Закон распределения:

X	0	1	2
P	0,04	0,32	0,64

Математическое ожидание:

$M(X) = 0*0{,}04 + 1*0{,}32 + 2*0{,}64 = 1{,}6$.

17.2.35. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Найти закон распределения случайной величины X.

$p_1=0{,}9$ $\quad$ $M(X)=3{,}1$ $\quad$ $D(X)=0{,}09$

Решение:

$p_1 + p_2 = 1$; $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 = 0{,}9x_1 + 0{,}1x_2 = 3{,}1$

$D(X) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 - (M(X))^2 = 0{,}9x_1^2 + 0{,}1x_2^2 - 3{,}1^2 = 0{,}09$

Получаем систему уравнений:

$0{,}9x_1 + 0{,}1x_2 = 3{,}1$

$0{,}9x_1^2 + 0{,}1x_2^2 - 9{,}7 = 0$

Или

$9x_1 + x_2 = 31$

$9x_1^2 + x_2^2 - 97 = 0$

Из первого уравнения выражаем $x_2 = 31 - 9x_1$ и подставляем во второе уравнение:

$9x_1^2 + (31 - 9x_1)^2 - 97 = 0$

$90x_1^2 - 558x_1 + 864 = 0$

$45x_1^2 - 279x_1 + 432 = 0$

$D = 279*279\text{-}4*45*432 = 81$

$x = \frac{279 \pm 9}{90}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3.2$

При $x_1 = 3$, $x_2 = 31 - 9 \cdot 3 = 4$, $x_1 < x_2$

При $x_1 = 3{,}2$, $x_2 = 31 - 9 \cdot 3{,}2 = 2{,}2$, $x_1 > x_2$

Следовательно $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

x_i	3	4
p_i	0.9	0.1

Контрольная работа №3.

17.3.5. Известны математическое ожидание *a* и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (α;β)

a = 6; σ = 3; α = 2; β =11

Решение:

Вероятность попадания нормально распределенной величины в заданный интервал определяется через функцию Лапласа формулой:

$$p(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

$$p(2 < x < 11) = \Phi\left(\frac{11-6}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2-6}{3}\right) = \Phi(1.67) - \Phi(-1.33) = 0,4525 + 0,4082 = 0,8607$$

19.1.45. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Статистическое распределение представлено в таблице:

x	3	5	7	8	10	12	14
n	3	7	4	6	7	5	8

Найти с надёжностью 0,95 доверительный интервал для оценки математического ожидания.

Для нахождения числовых характеристик составим расчётную таблицу:

x_i	3	5	7	8	10	12	14	Сумма
n_i	3	7	4	6	7	5	8	40
$x_i n_i$	9	35	28	48	70	60	112	362
$x_i^2 n_i$	27	175	196	384	700	720	1568	3770

Находим выборочную среднюю: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \frac{362}{40} = 9.05$

Находим выборочную дисперсию:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 n_i - \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{3770}{40} - 9,05^2 = 12.35$$

Выборочное среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{12.35} = 3,51$$

Для оценки математического ожидания используем доверительный интервал:

$$\bar{x} - \frac{\sigma \cdot t}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{\sigma \cdot t}{\sqrt{n}},$$

где по таблицам t = t(γ, n) находим t = 1,984.

Находим доверительный интервал:

$$9{,}05 - \frac{3.51 \cdot 1{,}984}{\sqrt{40}} < a < 9{,}05 + \frac{3.51 \cdot 1{,}984}{\sqrt{40}};$$

$$7{,}95 < a < 10{,}15.$$

19.2.5. Данные наблюдений над двумерной случайной величиной (X,У) представлены в корреляционной таблице. Методом наименьших квадратов найти выборочное уравнение прямой регрессии У на X. Построить график уравнения регрессии и показать точки $\left(x, \overline{y_x}\right)$, рассчитанные по таблице.

X	Y					n_x
	20	30	40	50	60	
20	7	3	-	-	-	10
30	52	110	13	1	-	176
40	1	14	23	2	-	40
50	-	1	4	6	1	12
60	-	-	-	3	6	9
70	-	-	-	-	3	3
n_y	60	128	40	12	10	250

Решение:

Уравнение линейной регрессии с у на х имеет вид: $y_x = \bar{y} + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$

Найдем необходимые числовые характеристики.

$\bar{x}$ = (20(7 + 3) + 30(52 + 110 + 13 + 1) + 40(1 + 14 + 23 + 2) + 50(1 + 4 + 6 + 1) + 60(3 + 6) + 70(3))/250 = 33.72

$\bar{y}$ = (20(7 + 52 + 1) + 30(3 + 110 + 14 + 1) + 40(13 + 23 + 4) + 50(1 + 2 + 6 + 3) + 60(1 + 6 + 3))/250 = 31.36

Дисперсии:

$\sigma^2_x = (20^2(7 + 3) + 30^2(52 + 110 + 13 + 1) + 40^2(1 + 14 + 23 + 2) + 50^2(1 + 4 + 6 + 1) + 60^2(3 + 6) + 70^2(3))/250 - 33.72^2 = 76.96$

$\sigma^2_y = (20^2(7 + 52 + 1) + 30^2(3 + 110 + 14 + 1) + 40^2(13 + 23 + 4) + 50^2(1 + 2 + 6 + 3) + 60^2(1 + 6 + 3))/250 - 31.36^2 = 93.35$

Откуда получаем среднеквадратические отклонения:

$\sigma_x = 8.77$ и $\sigma_y = 9.66$

и ковариация:

$Cov(x,y) = (20•20•7 + 30•20•52 + 40•20•1 + 20•30•3 + 30•30•110 + 40•30•14 + 50•30•1 + 30•40•13 + 40•40•23 + 50•40•4 + 30•50•1 + 40•50•2 + 50•50•6 + 60•50•3 + 50•60•1 + 60•60•6 + 70•60•3)/250 - 33.72 • 31.36 = 66.54$

Определим коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$r_{xy} = \frac{66.54}{8.77 \cdot 9.66} = 0.79$$

Запишем уравнения линий регрессии y(x):

$$y_x = 31.36 + 0.79 \cdot \frac{9.66}{8.77}(x - 33.72)$$

и вычисляя, получаем:

$y_x = 0.86\ x + 2.21$

Построив точки, определяемые таблицей и линии регрессии, увидим, что обе линии проходят через точку с координатами (33.72; 31.36) и точки расположены близко к линиям регрессии.